Exercice N°1 **(3 points)**

Pour chaque question, il y a exactement une proposition correcte. L'élève doit cocher la proposition vraie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=2i$. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

1) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\dfrac{z^2-z}{z-2i}\right|=\left|\bar{z}\right|$ est :

☐ Δ	☐ $\Delta\cup\{O\}$	☐ $\{O\}$

2) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $z=1+\sin\theta e^{\frac{i\pi}{4}}$ avec $\theta\in[0,\pi]$ est :

☐ une droite	☐ un segment de droite	☐ un demi-cercle

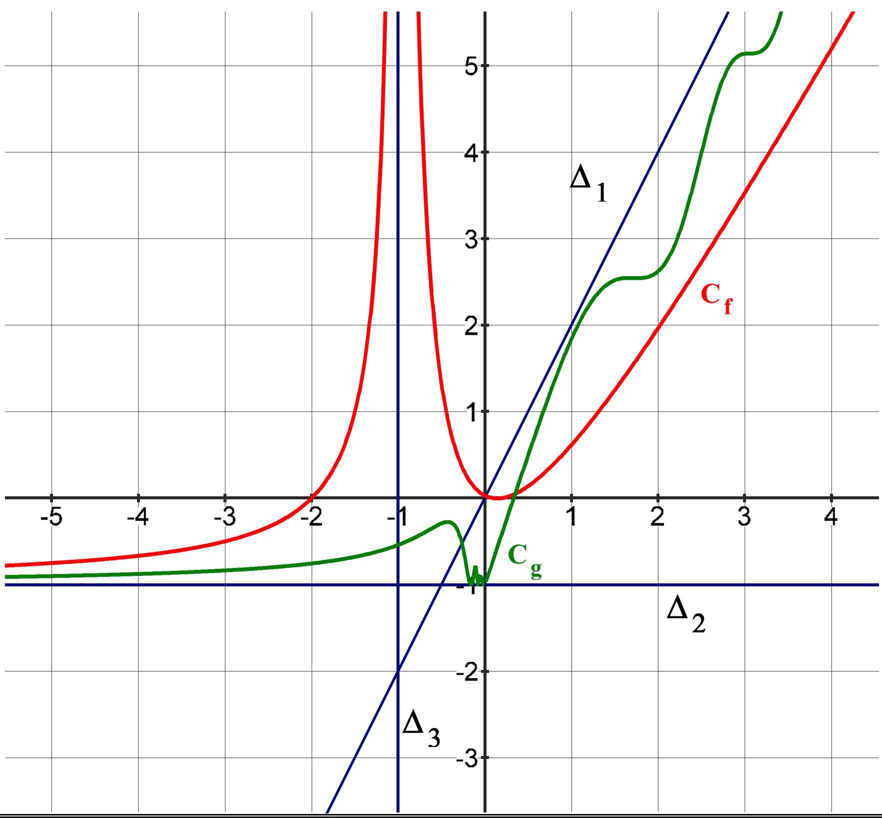
3) Soient les points $M(z)$ et $M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$ avec $z\in C^*$.

☐ Les points O,M et M' sont alignés	☐ $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OM'}$	☐ M et M' sont symétrique par rapport à $\left(O,\vec{u}\right)$

4) Une racine quatrième de $u=2+2\sqrt{3}\,i$ est :

☐ $e^{\frac{i\pi}{12}}$	☐ $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$	☐ $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{6}}$

Figure de l'exercice n°2



Annexe

A rendre avec la copie

Classe :

....

Nom et prénom :

....

....

Exercice N°2 **(5,5 points)**

Dans l'annexe ci-jointe ; on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$: la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ et les droites Δ_1 , Δ_2 *et* Δ_3 .

- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de Δ_1 au $+\infty$.
- Les droites Δ_2 *et* Δ_3 sont des asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est entre Δ_2 et $\mathscr{C}_f$ pour tout $x<-1$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est entre $\mathscr{C}_f$ et Δ_1 pour tout $x\geq 1$.

1) A l'aide d'une lecture graphique :

   a) Donner $\lim\limits_{-\infty} g$, $\lim\limits_{+\infty} g$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f\circ f(x)$ et $f\circ f(]-\infty,-1[)$.

   c) Dresser les tableaux de variation et de signe de f .

2) Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

   a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_h$ de définition de h puis justifier la continuité de h sur $\mathscr{D}_h$.

   b) La fonction h est-elle prolongeable par continuité en (-1) ? justifier.

   c) Représenter, en justifiant, A, B et C les points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ avec $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h.

   d) Sans justifier, dresser le tableau de variation de h puis tracer $\mathscr{C}_h$.

3) Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to(-1)} f\circ f(x)-2f(x)$.

Exercice N°3 **(5,5 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, M et M' d'affixes respectives $a=1+i$; $b=1-i$, z *et* z' tel que $z'=2-\dfrac{2}{z}$ *avec* $z\neq 0$.

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : (E) $z'=z$; donner les solutions sous forme exponentielle.
2) a) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a^{8n}+b^{8n}=2^{4n+1}$

3) On pose $z=e^{i\alpha}$ *où* $\alpha\in]0;\pi]$

   a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque $\alpha\in]0;\pi]$

   b) Montrer que $z'=4\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{-i\left(\frac{\alpha-\pi}{2}\right)}$

   c) Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, A et M' sont alignés

4) a) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{a;b\}$; $\dfrac{z'-b}{z'-a}=i\dfrac{z-b}{z-a}$

   b) Déduire l'ensemble des points M' lorsque M varie sur la médiatrice $[AB]$

   c) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle de diamètre $[AB]$?

Exercice N°4 **(6 points)**

1) On donne ci-dessous, le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^3+2x^2-x+1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{23}{27}$	↗	1	↘	$-\infty$

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[1,2]$.

Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}$

a) Vérifier que pour tout $x\geq 0$; $f(x)-x=\frac{g(x)}{x^2+1}$.

En déduire que $f(\alpha)=\alpha$

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$; $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq U_n<\alpha$

b) Montrer que (U_n) est monotone et en déduire qu'elle converge vers α

4) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}U_i=\frac{U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}}{n}$

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $f(\alpha)-f(U_n)=\frac{(\alpha+U_n)(\alpha-U_n)}{\left(U_n^2+1\right)\left(\alpha^2+1\right)}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0<\alpha-U_{n+1}\leq K(\alpha-U_n)$ avec $K=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0<\alpha-U_n\leq K^n\alpha$

d) Montrer que $0<K<1$

e) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $0<\alpha-V_n\leq\frac{\alpha\left(1-K^n\right)}{n(1-k)}$; en déduire $\lim_{n\to+\infty}V_n$