

DEVOIR DE CONTROLE NI**4M**<http://afimath.jimdo.com/>**Exercice N°1 (4 point)**

Soit P un nombre complexe de module 1

On considère l'équation : (Ep) : $z^2 - 2pz - 1 = 0$

1- déterminer le nombre complexe p pour que (Ep.) admette une racine double.

2- Soient z_1 et z_2 les racines de (Ep.). On pose :

$$u_1 = \frac{(1+z_1)}{p} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{(1+z_2)}{p}$$

a) Calculer $u_1 + u_2$ et $u_1 \cdot u_2$

b) Montrer que Si u_1 et u_2 ne sont pas des réels alors $|1+z_1| = |1+z_2|$
.Interpréter

c) Montrer que Si u_1 et u_2 sont des réels alors $\arg(1+z_1) \equiv \arg(1+z_2)[2\pi]$.Interpréter

Exercice N°2 (4 point)

On considère la suite U_n définie par :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n + 1 + \frac{2}{U_n} \quad \text{ou} \quad n \in \mathbb{N} .$$

1- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$

2- Montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante.

3- a) établir que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $1 \leq U_{n+1} - U_n \leq 3$

b) montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
on a : $n+1 \leq U_n \leq 3n+1$.

4- Calculer la limite de (U_n)

5- On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{(-1)^0}{U_0} + \frac{(-1)^1}{U_1} + \frac{(-1)^2}{U_2} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{U_{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{U_k} \quad \text{et} \quad W_n = V_n - \frac{1}{U_{2n+1}}$$

- Montrer que (V_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.
- Donner un encadrement de $L = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$.

Exercice N°3 (6 point)

Soit f l'application du plan P vers P définie par :

Pour tout $M(z)$ on associe $M'(Z)$ tel que : $Z = e^{i\alpha} z + 1 - e^{i\alpha}$

avec $\alpha \in]-\pi; \pi]$.

$(0, \overline{OA}, \overline{OB})$ un R.O.N.D du plan.

1- a) montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre Ω .

- Déterminer la valeur de α pour laquelle : f transforme :
 $A'(-1)$ en $A''(1-2i)$

2- Dans la suite de l'exercice on suppose que : $Z = iz + 1 - i$.

- Montrer que : $(E_1) z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (E_2) Z^3 + 3(-1+i)Z^2 - 6iz + 2 + i = 0$
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_1) : z^3 + 1 = 0$ et placer les points images M_1, M_2, M_3 des solutions dans le plan complexe, puis résoudre l'équation (E)
- En déduire que les points images des solutions de l'équation (E_2) sont $f(M_1), f(M_2)$ et $f(M_3)$ et que $A, f(M_1), f(M_2), f(M_3)$ sont situés sur le même cercle.

Exercice N°4 (6 point)

Soient α et β deux réels positifs de somme non nulle.

On note (U_n) la suite réelle définie par :

$$U_0 = \alpha ; U_1 = \beta \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} ; U_{n+2} = \sqrt{U_{n+1}} + \sqrt{U_n}$$

- 1) Quelles sont les limites éventuelle de (U_n) ?
- 2) Montrer que si , $U_n \leq 1$ à partir d'un rang n_0 , alors la suite (U_n) est croissante à partir de ce rang.
- 3) En déduire que : 0 ne peut pas être une limite de (U_n)
- 4) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $U_p \geq 1$ et montrer que $n \geq p ; U_n \geq 1$
- 5) On veut montrer que (U_n) converge vers 4 .

a) Montrer qu'il suffit de montrer que la suite $\sqrt{U_n}$ converge vers 2.

b) On pose alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$z_n = \left| \sqrt{U_n} - 2 \right|$$

Montrer que : $n \geq p ; z_{n+2} \leq \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$

c) On pose : $a = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$ et on considère la suite (x_n) définie par : $n \in \mathbb{N}$;

$$x_n = z_{n+1} - a z_n.$$

Montrer que : $n \geq p ; 0 \leq x_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3} - a \right) x_n$ puis que (x_n) tend vers 0

d) Justifier alors que (z_n) tend vers 0 elle aussi et conclure.

<http://afimath.jimdo.com/>
