Exercice n°1 : (4 points)

Donner la ou les réponses justes

1- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ,on considère les points A , B et C d'affixes respectives 1 , z et iz+1-i .
   a- Les points A , B et C sont alignés
   b- Le triangle ABC est un triangle rectangle et non isocèle
   c- Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle
   d- Le triangle ABC est un triangle isocèle et non rectangle

2- On considère le nombre complexe z= $1+e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]\pi, 2\pi[$.
   Un argument de z est :
   a- θ b - $\frac{\theta}{2}$ c- $\frac{\theta}{2}+\pi$

3- Soient les entiers a = n^2 et b = n^3+n^2+1 ; n est un entier
   a- a et b sont premiers entre eux b- il existe un entier n tel que a divise b
   c-il existe un entier n tel que b divise a

4- Soit dans $\mathbb{Z}$ L'équation (E) : $4x \equiv 1[13]$
   a- 10 est le seul inverse de 4 modulo 13 b- (E) possède une seule solution
   c-L'ensemble de solutions de (E) sont les entiers x tels que $x \equiv 10[13]$

5- Soit f une application du plan P dans lui-même qui transforme le repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ en $\left(O,\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)$; f(A) = A' ; f(B) = B' .A$\neq$ A' et B $\neq$ B' et soit Ω un point fixe par f .f est alors :
   a- Une isométrie du plan b- Une rotation de centre Ω c-Une symétrie glissante
   d-Une symétrie orthogonale

Exercice n°2 :(5 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes on considère l'équation :

(E) : $z^2-a(a+i)z+ia^3=0$ où est un nombre complexe non nul et z est l'inconnue .

1- Résoudre (E) .

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$.On considère les points A , M, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1 ; a , ia et a^2
   a- Montrer que A , M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si a est imaginaire pur .
   b- A est un nombre complexe non imaginaire pur. Montrer que le triangle $AM_1 M_2$ est équilatérale si et seulement si $|a|=|a+i|=1$

3- On pose a = $e^{i\theta}$; $\theta \in \left]0,\pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.Quel est l'ensemble des points M

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sont colinéaires .En déduire une construction des points M_1 et M_2 connaissant M.

Exercice n°3 : (5 points)

Dans le plan , on considère un triangle ABC équilatéral de centre O et f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC. I , J , K sont les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] et [BC] .D = $S_{(AC)}(B)$ et soit E le milieu de [AD].

1- a- Montrer que f(O) = O

b-Déterminer toutes les isométries f

2- Soit φ une isométrie qui transforme le triangle ABC en ACD.
   a- On pose g = $S_{(AC)} \circ \varphi$ .Déterminer l'image par g du triangle ABC .
   b- En déduire toutes les isométries φ qui transforme le triangle ABC en ACD.
3- Soit φ l'isométrie du plan tel que : φ (A) = D ; φ (B) = C et φ (C) = A
   a- Montrer que φ n'a pas de points invariants. Déduire la nature de φ .
   b- O pose φ = h o $t_{\overrightarrow{IA}}$ .Déterminer φ (K) et φ (J) .En déduire h(J) et h(E)
   c- Déterminer alors la nature de h et ses éléments caractéristiques puis déterminer les éléments caractéristiques de φ

Exercice n°4 : (6 points)

I) Soit l'équation (E) : 70x-13y=8.
1- Déterminer un couple (u,v) d'entiers tel que 70u-13v=1.
2- En déduire une solution particulière de (E) puis la résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
II) Soient a et b les entiers naturels définis par a = $(p+1)^2$ et b = p^3 +1 où p est un entier premier différent de 2 .
1- On suppose que (a,b) est solution de (E) .Montrer que $a \equiv 12[13]$.
2- On pose d = pgcd(a,b) .
   a- Justifier que d divise 8
   b- Vérifier que $p^3+1 = (p+1)^2(p-2) + 3(p+1)$.En déduire que d = pgcd ($(p+1)^2$,3(p+1)) puis que d = p+1 ou d = 3(p+1) .
   c- Prouver que d ne peut pas être égale à 3(p+1) puis en déduire les valeurs possibles de p
   d- Montrer que la seule valeur possible de p est 7.