

**EXERCICE N° 1 ( 7 points )**

- 1/ Démontrer que si  $z_1$  et  $z_2$  ont pour module 1 alors le nombre complexe  $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}$  est réel.
- 2/ Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z, \frac{1}{z}$  et  $1+z$  aient le même module.
- 3/ Déterminer tous les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2$  et  $z^4$  soient des complexes conjugués.
- 4/ Démontrer, sans chercher à résoudre l'équation, que les solutions de  $(z-i)^6 - (z-1)^6 = 0$  ont des parties réelles et imaginaires égales.
- 5/ Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $i, z$  et  $iz$ . Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $ABC$  soit un triangle équilatéral.

**EXERCICE N° 2 ( 5 points )**

Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé directe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $] -\pi, \pi[$ .

- 1/ Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $M(z) \mapsto M'(z')$  tel que  $z' = iz + 2(1-i)$ .
  - a- Montrer que  $f$  est une isométrie du plan.
  - b- Montrer que  $f$  admet un seul point invariant. Caractériser alors  $f$ .
- 2/ Soit  $g$  l'application de  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $M(z) \mapsto M'(z')$  tel que  $z' = ie^{i\theta}\bar{z} + 2e^{i\theta}(1-i)$ .
  - a- Montrer que  $g$  est une isométrie du plan.
  - b- Soit  $A$  et  $B$  les points du plan d'affixes respectives  $1-i$  et  $-2i$ . Déterminer la valeur de  $\theta$  pour laquelle on a :  $g(A) = A$ . Calculer pour cette valeur de  $\theta$  l'affixe du point  $g(B)$ . Quelle est dans ce cas la nature de  $g$  ?
- 3/ On suppose que  $\theta \neq 0$ .
  - a- Montrer que  $g$  n'admet aucun point invariant.
  - b- Soit  $\vec{u}$  le vecteur d'affixe  $(1-i)(1-e^{i\theta})$  et  $l = O^*g(O)$ . Montrer que  $h = t_{\vec{u}} \circ g$  est une isométrie qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = ie^{i\theta}\bar{z} + (1+e^{i\theta})(1-i)$   
Prouver que  $h$  est la symétrie orthogonale d'axe  $(Al)$ .

**EXERCICE N° 3 ( 8 points )**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par :  $f(x) = \frac{2\sin x}{1-\sin x}$  et  $C_f$  est sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/ Etudier  $f$  et tracer  $C_f$ .
- 2/ a- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Déterminer  $g(0), g(2)$ .
  - b- Tracer la courbe  $C_g$  de  $g$ . En déduire la position de  $C_g$  par rapport à la droite  $\Delta: y = x$ .
  - c- Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$
- 3/ Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$ .
  - a- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 2$ .
  - b- Montrer que  $(U_n)$  est décroissante. En déduire que  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.
- 4/ Soit  $(V_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = n[g(U_n + \frac{2}{n}) - g(U_n + \frac{1}{n})]$ .
  - a- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe  $c_n \in ]U_n + \frac{1}{n}, U_n + \frac{2}{n}[$  tel que  $V_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$
  - b- En déduire que  $(V_n)$  est convergente et donner sa limite.

Bon Travail