

**Exercice n°1 : (5 pts)**

1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 3x + 2 \sin x$

a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  ;  $3x - 2 \leq g(x) \leq 3x + 2$ .

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{g(x)} & \text{si } x > 0 \\ x^3 - 3x + \frac{1}{5} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un

repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $f$  est continue en 0.

b) Montrer que pour tout  $x > \frac{2}{3}$  ;  $\frac{x}{3x+2} \leq f(x) \leq \frac{x}{3x-2}$ .

c) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interprète géométriquement le résultat

3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  dans  $] -2, -1[$ .

**Exercice n°2 : (6 pts)**

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n}$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ;  $1 < u_n \leq 2$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$ .

b) En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Retrouver alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ .

3) On pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :  $n < S_n \leq n + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ .

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

**Exercice n°3 : (5 pts)**

Soit  $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on pose  $P(z) = 2z^3 - (3 + 2i \sin 2\theta)z^2 + (1 + 2i \sin 2\theta)z - \frac{1}{2}i \sin 2\theta$ .

1) a- Calculer  $P\left(\frac{1}{2}\right)$ . En déduire le nombre complexe  $b$  vérifiant  $P(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)(2z^2 + bz + i \sin 2\theta)$ .

b- Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ . On note  $z_0$  la solution réel et  $z_1$  et  $z_2$  les autres solutions.

c- Mettre  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on considère les points  $A, M_1$  et  $M_2$

d'affixes respectifs  $z_0 = \frac{1}{2}$  ;  $z_1 = \frac{1+e^{i2\theta}}{2}$  et  $z_2 = \frac{1-e^{-i2\theta}}{2}$

**a-** Montrer que, pour tout  $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , le triangle  $AM_1M_2$  est isocèle en A.

**b-** Pour quelle valeur de  $\theta$  le triangle  $AM_1M_2$  est équilatéral .

**c-** Quel est l'ensemble des point  $M_1$  lorsque  $\theta$  varie dans  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

**Exercice n°4 : (4 pts)**

1) Cette question constitue une restitution organisée de connaissances

**a-** Soient  $a, b, c$  et  $d$  des entiers relatifs.

Démontrer que si  $a \equiv b \pmod{7}$  et  $c \equiv d \pmod{7}$  alors  $ac \equiv bd \pmod{7}$ .

**b-** En déduire que : pour  $a$  et  $b$  entiers relatifs non nuls

si  $a \equiv b \pmod{7}$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $a^n \equiv b^n \pmod{7}$ .

2) Pour  $a=2$  puis pour  $a=3$ , déterminer un entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n \equiv 1 \pmod{7}$ .

3) Soit  $a$  un entier naturel non divisible par 7.

**a-** Montrer que :  $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .

**b-** On appelle *ordre* de  $a \pmod{7}$ , et on désigne par  $k$ , le plus petit entier naturel non nul tel que  $a^k \equiv 1 \pmod{7}$ .

Montrer que le reste  $r$  de la division euclidienne de 6 par  $k$  vérifie  $a^r \equiv 1 \pmod{7}$ .

**c-** En déduire que  $k$  divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de  $k$  ?

**d-** Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers  $a$  compris entre 2 et 6.

4) À tout entier naturel  $n$ , on associe le nombre  $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ . Montrer que  $A_{2008} \equiv 6 \pmod{7}$ .

**FIN.**