http://afimath.jimdo.com/	**Devoir de Contrôle N°01** **Durée : 02 h**	Classe : $4^{ème}$ Maths

***EXERCICE N° 01*(3 pts) :**

Répondre par vrai ou faux :

Soit $z = 1 - tan^2(\alpha) + 2\, i\, tan(\alpha)$; $\alpha \in \left] -\dfrac{\pi}{4}, 0 \right[$

a- $Ré(z) > 0$ $\square$; d- $Im(z) = i\left(\dfrac{sin(2\alpha)}{cos^2(\alpha)}\right)$ $\square$

b- $Ré(z) = \dfrac{cos(2\alpha)}{cos^2(\alpha)}$ $\square$; e- $Im(z) < 0$ $\square$

c- $|z| = 1 + tan^2(\alpha)$ $\square$; f- $arg(z) \equiv 2\alpha\, [2\pi]$ $\square$

***EXERCICE N° 02*(4 pts) :**

Soit $f_\theta(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1+i)(e^{i\theta} - 1)$; $\theta \in [0, 2\pi[$

1°) a- Vérifier que $f_\theta(1+i) = 0$

b- En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les-points $A(-1)$, $B(i\sqrt{3})$ et $M(-1 + e^{i\theta})$.

a- Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur un cercle (ξ) dont on précisera le rayon.

b- Déterminer les valeurs de θ pour les quelles la droite (BM) est tangente au cercle (ξ).

***EXERCICE N° 03*(6 pts) :**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que $U_n \geq 1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2/ Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

4/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 - \dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{U_n^2}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n}}{U_n}$

***EXERCICE N° 04*(7 pts) :**

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$; $M(x, y) \mapsto M'(x', y') / \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$

1-a) Montrer que f est une isométrie de $\mathscr{P}$.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

2- On se propose de déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite (D) par deux méthodes.

-A-

a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.

b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.

c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D).

-B-

a) Sachant que pour tout point M de $\mathscr{P}$ et son image M' par f on a : $M * M' \in (D)$;

donner une équation cartésienne de (D).

b) En déduire le vecteur $\vec{u}$.

Bon travail… ✍