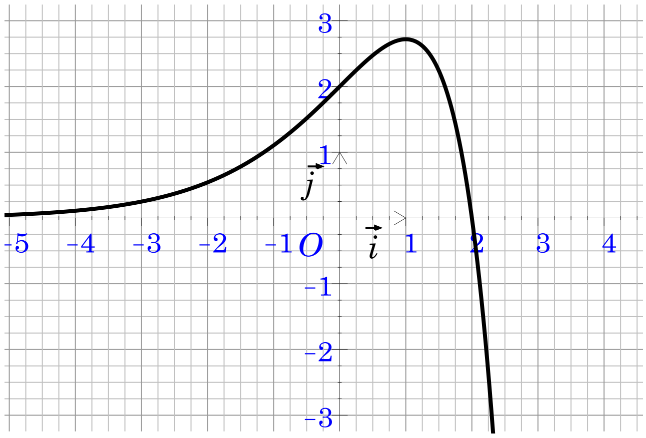
Lycée pilote Bourguiba Tunis
Mrs : Khaled-Zaâlani-Masmoudi

Classes : 4ème maths
Le 29/10/2007

Devoir de contrôle N°1

Exercice 1 : (4 points)



La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On note que $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
Pour chaque question indiquer la ou les réponses exactes.

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de même signe que f et telle que pour tout réel x : $h(x) \leq f(x)$. On a alors :
   a) $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$ b) $\lim\limits_{-\infty} h = 0$ c) $\lim\limits_{+\infty} h = -\infty$ d) h est continue sur $\mathbb{R}$.
2) La courbe de $\dfrac{1}{f}$ admet nécessairement une asymptote :
   a) Horizontale b) Verticale c) Oblique .
3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$. Alors :
   a) $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ b) $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ c) $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
4) Considérons la même fonction g qu'au 3). On a alors :
   a) $\lim\limits_{-\infty} g \circ f = -\infty$ b) $\lim\limits_{-\infty} g \circ f = +\infty$ c) $\lim\limits_{+\infty} g \circ f = -1$ d) $\lim\limits_{+\infty} g \circ f = 1$.

Exercice 2 : (2 points)

Une voiture parcourt, sans arrêt, un trajet de 200 km en deux heures.
Soit $d(t)$ la distance (en km) parcourue par la voiture entre les instants 0 et t où $t \in [0\,;2]$ (t est exprimé en heure) et soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $f(t) = d(1+t) - d(t)$.

1) Calculer $f(0) + f(1)$.
2) En déduire qu'il existe un intervalle de temps d'une heure durant lequel la voiture parcourt exactement 100 km.

Exercice 3 : (7 points)

Soit f l'application de $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z) = z' = \dfrac{z^2+i}{\bar{z}^2}$.

1) Calculer $f\left(\frac{1-i}{2}\right)$ et $f\left(\frac{-1+i}{2}\right)$. f est-elle bijective ?

2) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$: $\overline{z}^{-2} = z^2\overline{z'} + i$ et que $z^2\left(1 - z'\overline{z'}\right) = i(z' - 1)$.

3) Pour $\theta\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on pose : $b = \frac{1}{\sqrt{2\cos\theta}}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$ et B le point d'affixe b dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(z\neq0)$ tels que $z' = 1$.

   b) Calculer $f(b)$. En déduire que $B\in\mathscr{C}$.

4) Soit $A(1)$ et $M(z\neq0)$ tel que $M\notin\mathscr{C}$. On pose $M'(z')$ et Δ la droite d'équation $y = -x$.

   a) Montrer que $(\widehat{\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM'}}) - 2(\widehat{\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

   b) Montrer que si $M\in\Delta$ alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 4 : (7 points)

Soit f une fonction définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et telle que $f([0\,;1]) = [0\,;1]$.

1) Déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f\circ f(0)$ et $f\circ f(1)$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0\,;1[$ une solution unique α.

   Dans la suite on admettra que :

x	0		α		1
$f\circ f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	0

   Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $b_0\in[0,1]$ et pour tout entier n, $b_{n+1} = f(b_n)$.

   On pose pour tout entier n, $x_n = b_{2n}$ et $y_n = b_{2n+1}$.

3) Montrer que pour tout entier n, $b_n\in[0,1]$.
4) Calculer x_n et y_n pour $b_0 = 0$ puis pour $b_0 = 1$. Dans ces cas la suite b est-elle convergente ?
5) On suppose que $b_0\in\,]0,\alpha[$.

   a) Montrer que pour tout entier n, $0 < x_n < \alpha$.

   b) Etudier le sens de variation de la suite x.

   c) En déduire que x converge et préciser sa limite.

   d) La suite b est-elle convergente ? Justifier.