AFIF BEN ISMAIL http://afimath.jimdo.com/

Devoir de contrôle n°1

Section :4^{iéme} Maths *Durée : 2heures*

Exercice n°1(4points)

Cocher la seule réponse exacte

1) Soit f(x) = $\dfrac{1}{(x-\frac{\pi}{2})tgx}$ alors $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ est égale:

a) -1 $b)\ \dfrac{1}{2}$ $c)\ +\infty$ $d)$ n'existe pas∂ .

2) On pose f(x) = $\sqrt{x^2-1}$ et g(x) = $\dfrac{1}{\sin x}$ $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors l'expression de la fonction (fog)(x) est:

a) $\dfrac{2+\cos x}{\sin x}$ $b)\ tg(x)$ $c)\ -\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ $d)\ cotg(x)$

3) La forme exponentielle du complexe $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ est:

a) $2e^{i\frac{\pi}{12}}$ $b)\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ $c)\ \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ $d)\ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

4) l'ensemble des points M(z) tels que : $\arg(\dfrac{z-i}{z})\equiv\dfrac{\pi}{3}[\pi]$ est:

a) Un cercle privé d'un point b)Un cercle privé de deux points c) une demie droite privée d'un point.

Exercice n°2

Dans le plan complexe on note M le point d'affixe z

1°) Résoudre l'équation : f(z) = 1 + 2 i.

Mettre la solution z_0 sous la forme cartésienne.

Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe est z_0.

2°) Soit z un élément de E. On note r le module de z + i et α une mesure de son argument.

Mettre z + i puis f(z) – i sous la forme exponentielle.

Exprimer la forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et α.

3°) Soit A le point d'affixe – i.

a) Interpréter géométriquement les expressions : | z + i | et Arg (z + i).

Déterminer l'ensemble C des points M vérifiant $|f(z)-i|=\sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\dfrac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de f(z) – i.

b) Montrer que B appartient à C et D et construire C et D.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

1°/ a)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur IR.

b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°/ a) Montrer que f est une bijection de IR sur] -1, 1 [et tracer la courbe C' de f^{-1} dans le même repère.

b) Trouver l'expression de $f^{-1}(x)$.Soit f l'application : de E = $\mathbb{C}$ - {-i} dans $\mathbb{C}$ définie par : z → f(z) = $\dfrac{iz}{z+i}$.

Exercice n°4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$.

Soient (C) sa courbe dans un plan rapporté à repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Déterminer trois réels a, b, c tels que , pour tout x de IR \ {1}, on ait : $f(x) = a x + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b) Etudier les variations de f.

2°) a) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

b) Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet, dans IR, une seule solution x_0 et que : $x_0 \in \ ]-2, -1[$.

c) Construire (C).

Solutions (Indication)

Exercice1 : : a-d-c-b

Exercice2 :

1°) $z_0 = \dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$; B (1/2 , - 3/2)

2°) $z + i = r e^{i\alpha}$ et $f(z) - i = \dfrac{1}{r}e^{-i\alpha}$.

$f(z) - i = \dfrac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.

3°) $| z + i | = AM$ et $\operatorname{Arg}(z+i) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$.

C est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D est la demi-droite [A x) telle que : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{Ax}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} [2\pi]$ privée du point A.

Exercice3 :

1°) a) Continuité

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur IR donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur IR et par suite f est continue sur IR comme quotient de deux fonctions continues sur IR.

Dérivabilité

Si $x \in \ ]-\infty ; 0[$ $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et si $x \in \ ]0 ; +\infty[$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Donc f est dérivable sur chacun des deux intervalles] - ∞ ; 0 [et] 0 ; + ∞ [car les fonctions rationnelles sont dérivables là où elles sont définies.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = 1$ donc f est dérivable en 0 et f'(0) = 1.

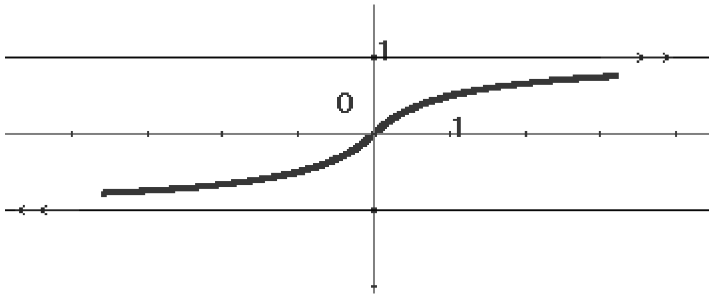
f est dérivable sur IR.

b) Si $x \in \ ]-\infty ; 0[$ $f'(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

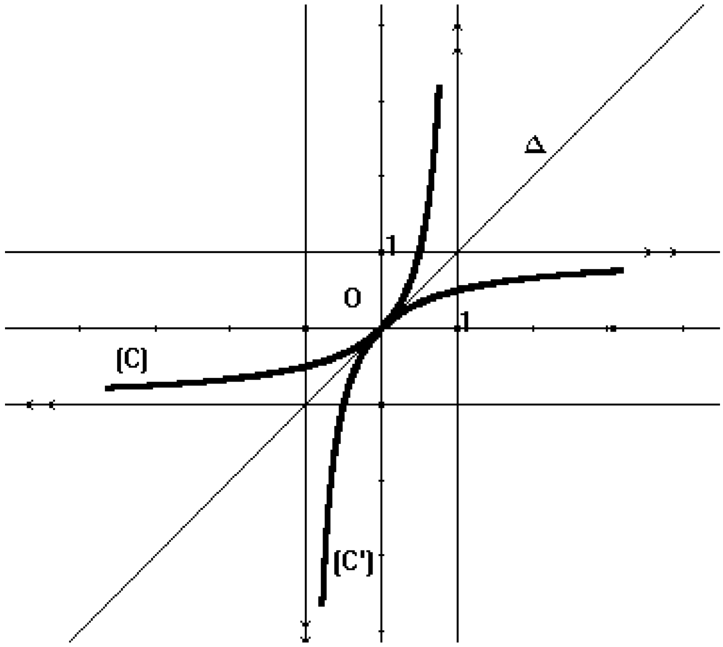
Si $x \in \ ]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

X	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	-1 $\qquad\qquad$ 1



2°) a) f est strictement croissante sur IR donc f est une bijection de IR sur f<IR>.
f est continue et strictement croissante sur IR donc $f<IR> = \left] \lim\limits_{-\infty} f \ , \ \lim\limits_{+\infty} f \right[=]-1 , 1[$.
$(C') = S_{\Delta}(C)$ où $\Delta : y = x$.



b) Soit $x \in]-1 ; 1[$ et $y \in$ IR.
Si $x \geq 0$ alors $y \geq 0$
$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1 + y} = x$$
$$\Leftrightarrow y = x(1 + y)$$
$$\Leftrightarrow y = x + xy$$
$$\Leftrightarrow y - xy = x$$
$$\Leftrightarrow y(1 - x) = x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1 - x}$$

Si $x \leq 0$ alors $y \leq 0$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{y}{1 - y} = x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1 + x}$$

Dans les deux cas $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$.

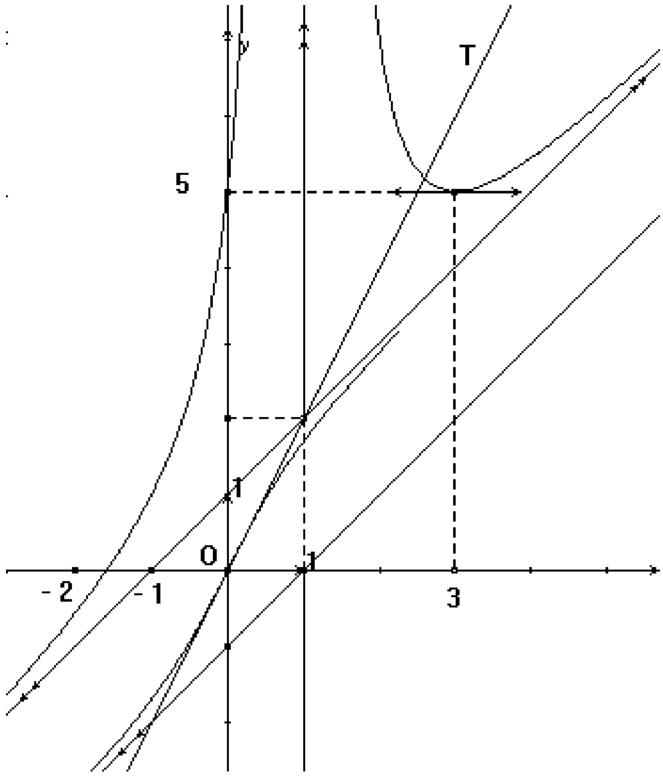
Exercice4 :

1°) a) $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{(x-9)(x^2+3)}{(x-1)^3}$.

2°) a) $f(x) - (x+1) = \dfrac{4}{(x-1)^2} > 0$: (C) est au dessus de son asymptote oblique Δ : y : x + 1.

c)



3°) a) $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$.

b) E = IR.

c) $(g^{-1})'(0) = ½$