AFIF BEN ISMAIL *************************	***DEVOIR DE CONTROLE N°1*** *$4^{ème}$Math************Durée : 2^H*	http://afimath.jimdo.com/ ***********************
	LE 05/11/2010	

N.B: On tiendra compte de la rédaction et de la clarté des copies.

Exercice n°1: *(3pts)*

Répondre par "vrai" ou "faux" à chaque question. (Sans justification)

1) Soient les fonctions f et g définies par f(x)= $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2$ et g(x)= $\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; Alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}$ gof(x)= $\frac{1}{4}$.

2) Si $U_n= -V_n=\frac{1}{n}$; $n\in IN^*$; alors les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

3) Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et si g est une fonction décroissante sur un intervalle J tel que $g(J)\subset I$, alors fog est décroissante sur J.

4) Soient trois points distincts $A(z_A)$,$B(z_B)$ et $C(z_C)$ tel que $(z_A - z_B)=i(z_B - z_C)$.Alors le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice n°2: *(5,5pts)*

Soit la fonction f définie sur IR par f(x)= $\begin{cases} x^3+3x^2-\pi & si\ x\geq 0 \\ \dfrac{-2\pi x+\sin(\pi x)}{x} & si\ x<0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Montrer que pour tout $x<0$, on a : $-2\pi+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq -2\pi-\frac{1}{x}$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Etudier la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Soit g la restriction de f sur IR_+ .

   a) Déterminer le sens de variation de g.

   b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que $0<\alpha<1$.

   c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

Exercice n°3: *(5,5pts)*

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN* par : $\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{U_n^2+\dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a: $U_n\geq 1$.

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

Voir suite au verso $\Rightarrow$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a: $U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a: $U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$.

c) Que peut-on dire de la convergence de la suite (U_n)? Expliquer.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$ on a: $U_n^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

b) Calculer alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n°4: *(6pts)*

I) Soit $\theta \in]0, \pi[$.

Résoudre, dans C, l'équation (E_θ): $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, M et M' d'affixes respectives 1, $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.

2) Montrer que M et M' sont symétriques par rapport au point A.

3) a) Montrer que le triangle OMM' est rectangle.

b) Montrer que l'aire du triangle OMM' est égale à $\sin\theta$.

4) Soit N le point d'affixe $(1+i)(1+e^{i\theta})$.

a) Montrer que le triangle OMN est rectangle, isocèle en M et direct.

b) En déduire une construction du point N à partir de M.

5) Montrer que OM'MN est un trapèze.

6) a) Montrer que L'aire de ce trapèze est égale à $1 + \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la valeur de θ pour que l'aire du trapèze soit maximale.

BON TRAVAIL