*** DEVOIR DE CONTROLE N° 3 *** 18/04/2009	**SECTIONS :** 4$^{\text{éme}}$ *Sciences Expérimentales* **1** **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 2 *heures* http://afimath.jimdo.com/

Exercice 1: (3 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : *Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point et une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. Pour tous réels a et b, strictement positifs, $\ln(ab)-\ln(a^2)$ est égal à :

   a) $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ b) $\ln(b-a)$ c) $\frac{\ln b}{\ln a}$

2. $e^{-2\ln 3}$ est égal à :

   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 9

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $e^{3x}-1\geq 0$ est l'intervalle

   a) $[0,+\infty[$ b) $[1,+\infty[$ c) $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice 2: (6 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x+2x^2-3$.

   Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g		$-\infty$ ↗ 0 ↗	$+\infty$

   En utilisant une calculatrice on a obtenu $\alpha\approx 1{,}19$.

   Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}+2x-5$.

   On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Déterminer la limite de la fonction f à droite en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire le tableau de variations de f.
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.
   d) Montrer que la droite $D: y=2x-5$ est une asymptote à C_f
   e) Tracer la courbe représentative de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

4. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=(\ln x)^2$.

   a) Calculer la dérivée h' de h.

b) En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}h'(x)+2x-5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

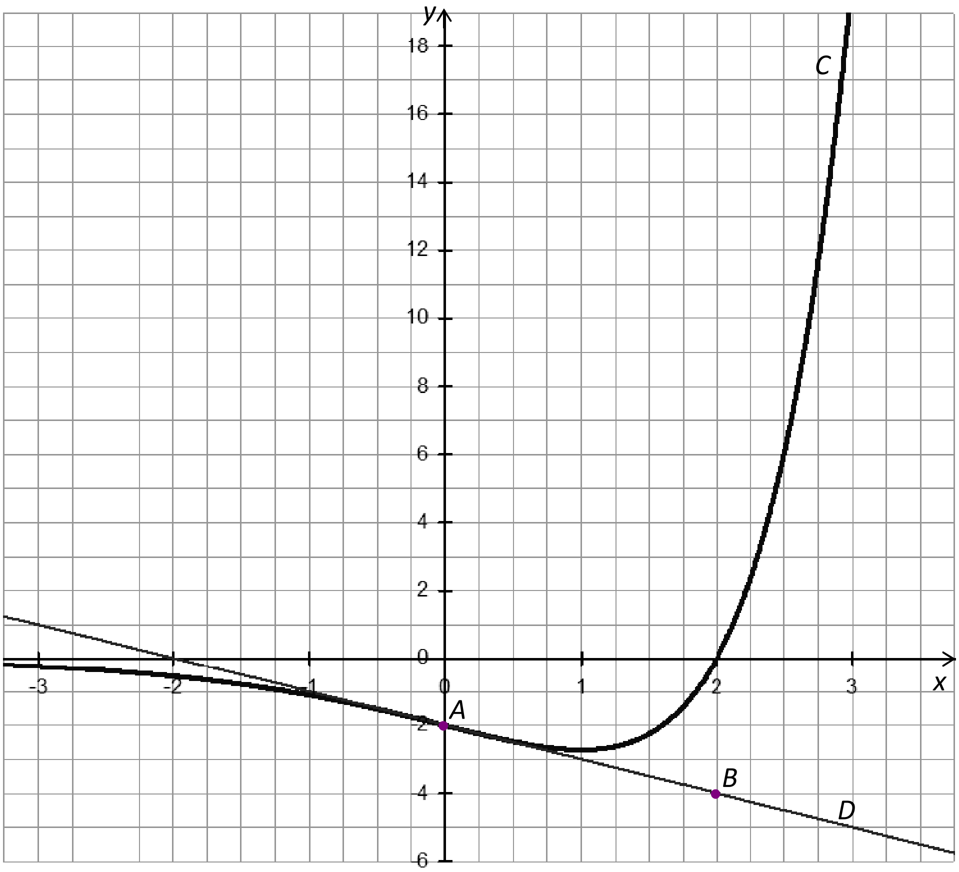
c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}^2$ (*On donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième*).

Exercice 3: (6 pts)

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe C ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La tangente D à la courbe C au point $A(0,-2)$ passe par le point $B(2,-4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.
   b) Justifier que : $f'(0)=-1$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x)=(x+a)\mathrm{e}^{bx}$.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x)=(bx+ab+1)\mathrm{e}^{bx}$.
   b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Calculer $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle [2 , 3].
Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4: (5 pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

PARTIE A : un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i)
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Interpréter le résultat
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent (*les coefficients seront arrondis à l'unité*).
4. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE B : un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année.
4. En prenant l'approximation $y \approx 57{,}1\,\mathrm{e}^{0{,}224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE C : comparaison des ajustements.

En 2009, il y a eu 430 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ? Justifier la réponse.