

	<i>Devoir de contrôle n° 3</i> Mathématiques	<i>Classe : 4^{ème} Sc exp</i>
<i>Date : 24 / 04 / 2010</i>	http://afimath.jimdo.com/	<i>Durée : 2 heures</i>

Exercice n°1 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Calculer les limites de f aux bornes de $]0, +\infty[$.

2) a/ Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2+x-1}{x(2x+1)}$.

b/ Etablir le tableau de variations de f .

3) a/ Montrer que la droite $\Delta: y = x + \ln 2$ est une asymptote de C_f .

b/ Comparer pour $x > 0$, $\frac{2x}{2x+1}$ et 1, en déduire la position de C_f par rapport à Δ .

4) Tracer Δ et C_f .

Exercice n°2 : (5 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite U par :

$$U_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a/ Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

b/ En déduire que : $\frac{1}{e} \leq U_0 \leq 1$.

2) Calculer U_1 .

3) a/ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.

b/ Etudier le sens de variation de la suite U .

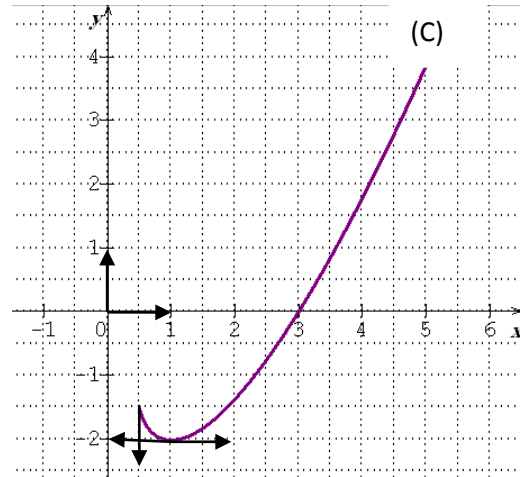
c/ En déduire que la suite U est convergente.

4) a/ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b/ En déduire la limite de la suite U .

Exercice n°3 : (5 pts)

La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction F continue sur $[0,5 ; 5]$, dérivable sur $]0,5 ; 5]$.



On sait que (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3 et a une tangente horizontale au point d'abscisse 1 et une demi tangente verticale au point d'abscisse 0,5.

On note f la fonction dérivée de F .

1) A l'aide d'une lecture graphique :

a/ Déterminer : $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$.

b/ Donner les variations de la fonction F et en déduire le signe de f .

c/ Calculer $\int_1^3 f(x)dx$.

2) Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$f_1(x) = (x^2 - x)e^{2x-1} \quad f_2(x) = \ln(2x - 1) \quad f_3(x) = 1 - \frac{1}{2x-1}.$$

Une de ces trois fonctions est la fonction f .

a/ Etudier le signe de f_1 sur l'intervalle $]0,5 ; 5]$.

b/ Résoudre dans $]0,5 ; 5]$ l'inéquation : $f_2(x) \geq 0$.

c/ Etudier le signe de f_3 sur l'intervalle $]0,5 ; 5]$.

d/ Calculer $\int_1^3 f_3(x)dx$.

e/ Laquelle de trois fonctions est la fonction f ? Justifier la réponse.

Exercice n°4 : (4 pts)

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6 et les trois autres faces sont numérotées 1.

On tire au hasard et simultanément deux dés de l'urne et on les lance.

On considère les événements :

A : « les deux dés tirés sont normaux ».

B : « Les faces supérieures des deux dés lancés sont numérotées 6 ».

1) Calculer $p(A)$

2) a/ Calculer : $p(B/A)$, probabilité de B sachant A est réalisé, puis $p(A \cap B)$.

b/ Montrer que : $p(B) = \frac{7}{108}$.

3) Calculer $p(A/B)$, probabilité de A sachant B est réalisé.

Bonne chance

<http://afimath.jimdo.com/>