

## Devoir de synthèse n° 2

Mathématiques

Classe : 4<sup>ème</sup> Sc exp

Date : 03 / 03 / 2010

<http://afimath.jimdo.com/>

Durée : 3 heures

### Exercice n°1 : (3 pts)

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est compté 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

1) Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **vrai** ou **faux** sans justification.

P<sub>1</sub> : On donne les fonctions  $F$  et  $G$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{4x^2+6x+9}{x^2+x+2}.$$

$F$  et  $G$  sont deux primitives d'une même fonction.

P<sub>2</sub> :  $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx = 1 - \int_0^1 x^3 \, dx$ .

P<sub>3</sub> : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

Si  $\int_0^1 (f(t) - 1) dt = 0$ , alors, la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0, 1]$  est égale à 1.

2) Pour chacune des questions suivantes, une seule parmi les réponses proposées est correcte. Indiquer la lettre qui correspond à la bonne réponse.

Soit  $ABCDEFGH$  un cube,  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des

arêtes  $[EF]$  et  $[FG]$ ,  $L$  est le point défini par :  $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$ .

On considère le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

Soit  $P$  le plan d'équation :  $4x - 4y + 3z - 3 = 0$ .

Q<sub>1</sub> : Le plan  $P$  est le plan :

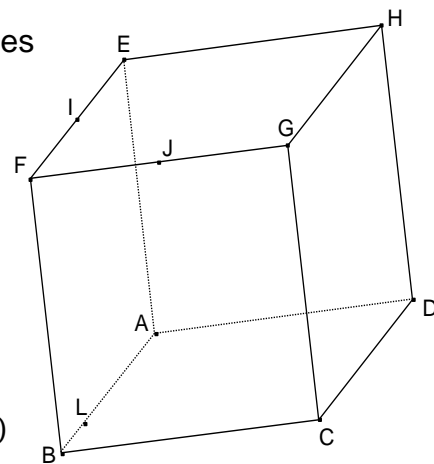
a/  $(GLE)$       b/  $(LEJ)$       c/  $(GFA)$

Q<sub>2</sub> : Le plan parallèle à  $P$  passant par  $I$  coupe la droite  $(FB)$  en  $M$  de coordonnées :

a/  $(1, 0, \frac{1}{5})$       b/  $(1, 0, \frac{1}{4})$       c/  $(1, 0, \frac{1}{3})$ .

Q<sub>3</sub> : Une représentation paramétrique de la droite  $(GL)$  est :

$$a/ \begin{cases} x = \frac{7}{4} + a \\ y = 4 + 4a \\ z = 4 + 4a \end{cases} \quad b/ \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{4}a \\ y = a \\ z = a \end{cases} \quad c/ \begin{cases} x = 1 + a \\ y = 1 + a \\ z = 1 + 4a \end{cases}$$



Exercice n°2 : (5 pts)

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-1, -1, 1)$  et  $B(-1, 2, -2)$  et le plan P d'équation :  $x + y + z - 2 = 0$ .

- 1) Montrer que la droite  $(AB)$  est parallèle à P.
- 2) Soit  $a$  un réel, on désigne par  $S_a$  l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que :
 
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2ay + 2az + a^2 + a = 0.$$
  - a/ Montrer que, pour tout réel  $a$ ,  $S_a$  est une sphère de centre  $I_a(-1, a, -a)$  et de rayon  $R_a = \sqrt{a^2 - a + 1}$ .
  - b/ Montrer que  $I_a \in (AB)$ .
  - c/ Déterminer  $a$  pour que  $S_a$  soit tangente à P.
- 3) Soit  $Q$  le plan d'équation :  $y - z - 4 = 0$ .
  - a/ Vérifier que  $Q$  est perpendiculaire à  $(AB)$ .
  - b/ Déterminer  $a$  pour que  $S_a$  coupe  $Q$  suivant un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $\sqrt{5}$ .
  - c/ Déterminer dans ce cas les coordonnées du centre de  $\mathcal{C}$ .

Exercice n°3 : (5 pts)

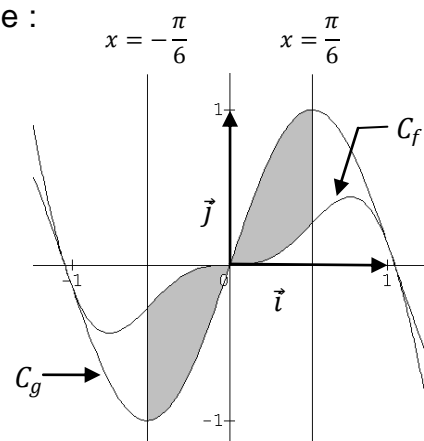
Soit  $(I_n)$  la suite définie sur  $IN$  par :  $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n \sin 3x \, dx$ .

- 1) a/ Montrer que, pour tout  $n \in IN$ ,  $I_n \geq 0$ .  
 b/ Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.  
 c/ En déduire que  $(I_n)$  est convergente.
- 2) a/ Montrer que, pour tout  $n \in IN$ ,  $I_n \leq \int_0^{\pi/6} x^n \, dx$ .  
 b/ Déterminer alors la limite de la suite  $(I_n)$ .
- 3) a/ Calculer  $I_0$ .  
 b/ En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $I_1 = \frac{1}{9}$ .

c/ En effectuant deux intégrations par parties, montrer que :

pour tout  $n \in IN$ , 
$$I_{n+2} = \frac{n+2}{9} \left( \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \right).$$

d/ On a représenté ci-contre les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = x^2 \sin 3x$  et  $g(x) = \sin 3x$ .  
 Calculer l'aire de la partie grise.



Exercice n°4 : (7 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a/ Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .  
b/ Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) \leq 1$ .  
c/ En déduire que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq (x - 1)$ .
- 2) a/ Montrer que le point  $I(0, -1)$  est un centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .  
b/ Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point  $I$ .  
c/ Etudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$ .  
d/ En déduire que  $I$  est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$ .
- 3) a/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
b/ Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$  ainsi que ses asymptotes.
- 4) a/ Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -2, 0[$ .  
b/ Tracer  $\mathcal{C}'$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 5) Montrer que l'équation :  $f(x) = x$ , admet dans l'intervalle  $] -2, -1[$  une solution unique  $a$ .
- 6) a/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta: y = x$  et les droites d'équations :  $x = a$  et  $x = 0$ .  
b/ En déduire la valeur de l'intégrale :  $\int_a^{-1} f^{-1}(x) dx$ .

Bonne chance

<http://afimath.jimdo.com/>