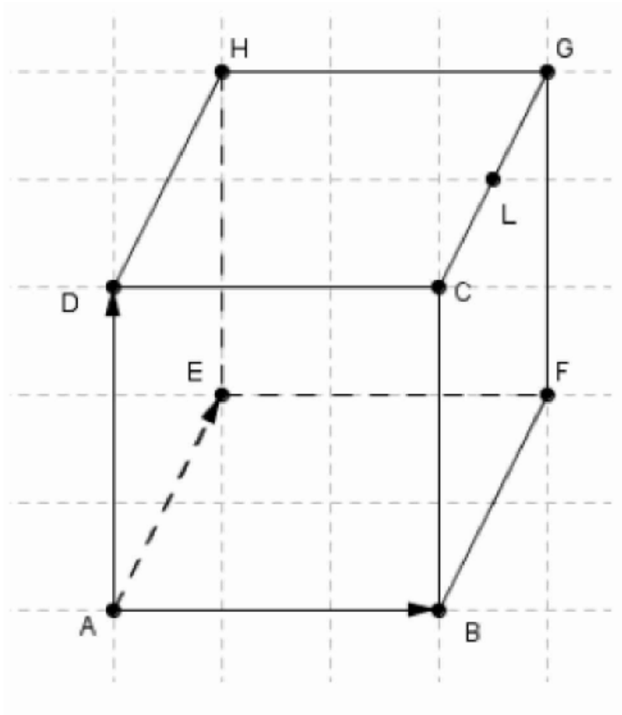
*** **DEVOIR DE SYNTHESE N° 2** *** *04/03/2009*	**SECTIONS :** $4^{\text{éme}}$ *Sciences Expérimentales* **1** **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 3 *heures*

<u>EXERCICE N° 1</u>: (3 points)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème *: Une mauvaise réponse enlève la moitié des points attribués à la question. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.*

ABCDEFGH est un cube. On désigne par L le milieu du segment [CG] et $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé direct



1- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{AE}$; b) $\overrightarrow{EA}$; c) AE
2- L'aire du triangle ABD est :
   a) $\dfrac{1}{2}$; b) 1 ; c) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$
3- La distance du point G à la droite (DF) est :
   a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; c) 1

<u>EXERCICE N° 2</u>: (5 points)

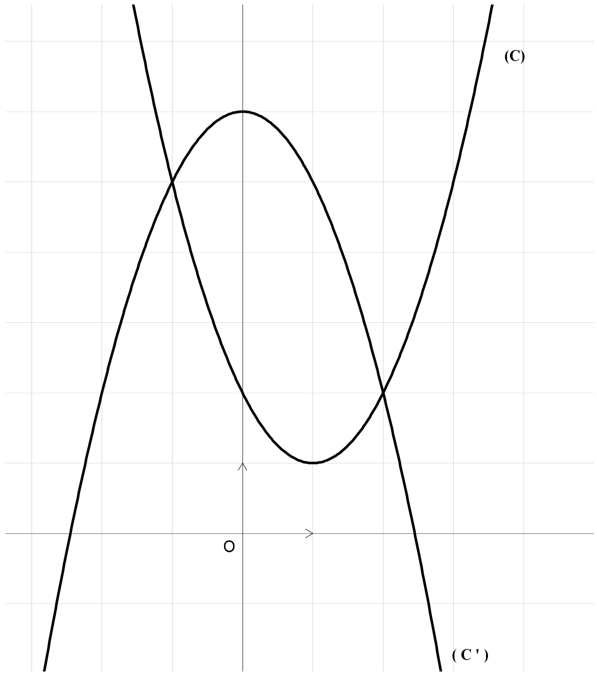
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$I_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt \ .$$

1. a) Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs.
   b) Étudier les variations de la suite (I_n).
   c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (I_n)?
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la limite de la suite (I_n).
3. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, $I_{n+1} = -(n+1)J_n + \sin(1)$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

EXERCICE N° 3: (3 points)

Ci contre sont tracées les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions *f* et *g* définies sur ℝ par $f(x)=x^2-2x+2$ et $g(x)=-x^2+6$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan



1- Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=2$
2- On pose pour tout réel *x*, $h(x)=g(x)-f(x)$, en déduire la valeur moyenne de *h* sur l'intervalle $\left[-1,2\right]$
3- Vérifier que pour tout réel *x*, $f\left(1-x\right)+g(x)=7$.

   En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^3 f\left(1-x\right)dx$

EXERCICE N° 4: (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

1- Soit l'ensemble $S=\left\{M\left(x,y,z\right)/\,x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-3=0\right\}$

   Montrer que *S* est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées du centre I
2- a- Vérifier que $A\left(-3,1,1\right)$ est un point de *S*

   b- Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à *S* en A
3- Soit Q le plan médiateur du segment $\left[AI\right]$ et *K* le milieu de $\left[AI\right]$
   - a- Déterminer une équation cartésienne de Q
   - b- Montrer que l'intersection du plan Q et de la sphère *S* est un cercle dont on précisera le centre et le rayon
   - c- Déterminer une équation cartésienne de la sphère *S'* tangent à P et Q respectivement en A et K
4- Soit Γ le plan d'équation $2x+y-2z-\dfrac{13}{2}=0$

   Montrer que l'intersection de Γ et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

EXERCICE N° 5: (4 points)

Un club sportif a été crée au début de l'année 2004 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y inscrits.
Le tableau ci-dessous donne le nombre d'adhérents de 2004 à 2009

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents Y	140	165	220	240	260	310

1- a- Représenter dans un repère orthogonal le nuage des points $M_i\left(x_i,y_i\right)$ associé à cette série statistique

   On prendra comme unités graphique 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnées, on commencera la graduation à 120.

   b- L'allure du nuage permet-il d'envisager un ajustement affine ? Justifier

   c- Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique
2- Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer
3- Calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2011

Correction

Solution-Exercice 1

1) b) ; 2) a) ; 3)a)

Solution-Exercice 2

1- a- Pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $t^n \geq 0$ et $cost \geq 0$ donc $t^n cost \geq 0$

Comme $t \longmapsto t^n cost$ est continue sur $[0,1]$ alors $I_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \geq 0$

b- $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 \left(t^{n+1} \cos t - t^n \cos t\right) dt = \int_0^1 t^n \cos t (t-1) \, dt$

On a pour tout $t \in [0,1]$, $t^n cost \geq 0$. D'autre part $t - 1 \leq 0$ alors $t^n cost(t-1) \leq 0$ et puisque $t \longmapsto t^n cost(t-1)$ est continue sur $[0,1]$ alors $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et par suite la suite (I_n) <u>est décroissante</u>

c- (I_n) est décroissante et minorée par 0 alors (I_n) est convergente

2- a- Pour tout $t \in [0,1]$, $cost \leq t$ et $t^n \geq 0$ alors $t^n cost \leq t^n$

$t \longmapsto t^n cost$ et $t \longmapsto t^n$ sont continues sur $[0,1]$ alors $I_n \leq \int_0^1 t^n \, dt$ d'où $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

b- $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim \frac{1}{1+n} = 0$ alors $\lim I_n = 0$

3- a- $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt$

soit $u(t) = t^{n+1} \longrightarrow u'(t) = (n+1)t^n$

$v'(t) = cost \longrightarrow v(t) = sint$

Donc $I_{n+1} = [t^{n+1} sint]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^n \, sint \, dt = \sin(1) - (n+1) J_n$ d'où

$I_{n+1} = -(n+1) J_n + \sin(1)$

b- $(n+1) J_n = \sin(1) - I_{n+1} \Leftrightarrow J_n = \frac{\sin(1) - I_{n+1}}{(n+1)}$ comme $\lim I_{n+1} = 0$ alors $\lim J_n = 0$

Solution-Exercice 3

1- l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 2$ est $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| \, dx$ or sur $[-1,2]$, (C') est au dessus de (C) alors $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{-1}^2 \left((-x^2+6) - (x^2 - 2x + 2)\right) dx =$ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^2 = \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9 \, u.a$

2- $\bar{h} = \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^2 h(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \frac{1}{3} \mathcal{A} = 3$

3- $f(1-x) + g(x) = (1-x)^2 - 2(1-x) + 2 - x^2 + 6 = 7$

$$\int_0^3 f(1-x) dx = \int_0^3 (7 - g(x)) \, dx = \int_0^3 7 \, dx - \int_0^3 g(x) dx = 7 \times 3 - \left[-\frac{1}{3}x^3 + 6x\right]_0^3 = 21 - 9 = 12$$

Solution-Exercice 4

1- S : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ $(\alpha = 2 \, ; \, \beta = -4 \, ; \, \gamma = 2 \; et \; \lambda = -3)$

$h = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \lambda = 6 + 3 = 9 > 0$ donc S est une sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et de rayon $R = 3$

2- a- $A(-3,1,1)$

$(-3)^2 + 1^2 + 1^2 + 2(-3) - 4 + 2 - 3 = 13 - 13 = 0$ donc $A \in S$

$b -$ S est tangent à P en A alors $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc $P: 2x + y - 2z + d = 0$

Comme $A \in P$ alors $-6 + 1 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$ d'où $\boxed{P: 2x + y - 2z + 7 = 0}$

3- a- Q le plan médiateur du segment $[AI]$ alors $\overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal à Q donc $Q: 2x + y - 2z + d = 0$

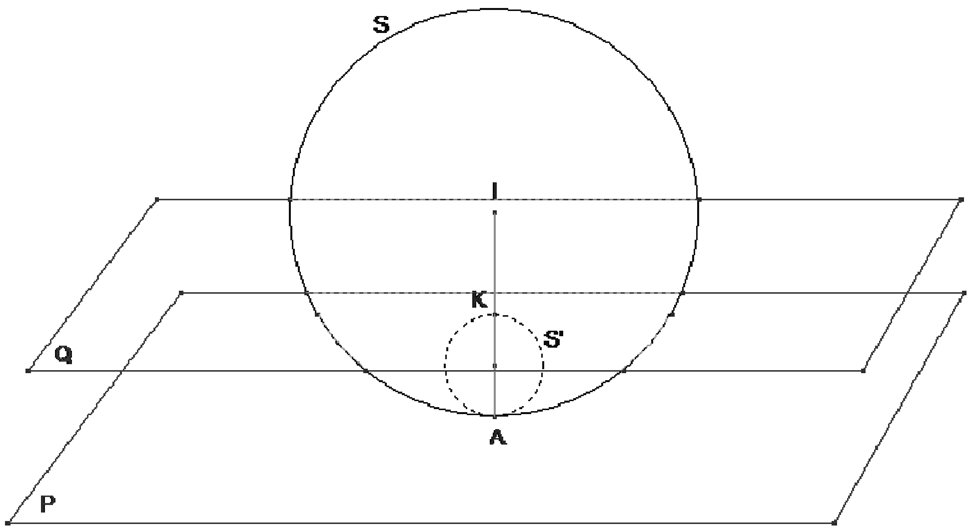
Or $K \in Q$ et $K\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ c.à.d. $K\left(-2, \frac{3}{2}, 0\right)$ donc $-4 + \frac{3}{2} + d = 0$ donc $d = \frac{5}{2}$

Conclusion : $\boxed{Q: 2x + y - 2z + \frac{5}{2} = 0}$

b- $d(I, Q) = IK = \frac{AI}{2} = \frac{3}{2} < R = 3$ donc $S \cap Q$ est le cercle de centre $K\left(-2, \frac{3}{2}, 0\right)$ (puisque K est le projeté orthogonal de I sur Q) et de rayon $r = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

c- S' est la sphère tangent à P et Q en A et K alors S' est la sphère de centre $J = A * K$ et de rayon $\frac{AK}{2} = \frac{IK}{2} = \frac{3}{4}$

or $J\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$ d'où $S': \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$



4- $\Gamma : 2x + y - 2z - \frac{13}{2} = 0$

$d(I, \Gamma) = \frac{\left|-2+2+2-\frac{13}{2}\right|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{2} < R = 3$ donc $S \cap \Gamma$ est le cercle de centre H et de rayon r'

Avec $r' = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

Et H est le projeté orthogonal de I sur Γ alors $H = \Gamma \cap (IH)$ avec (IH) a pour représentation paramétrique :

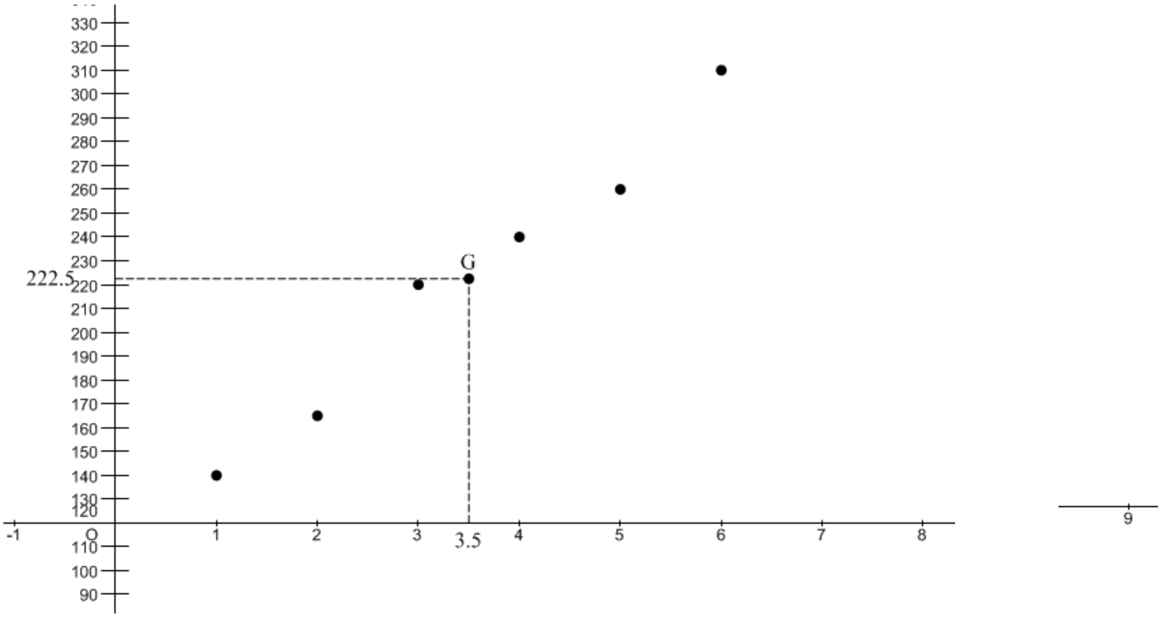
$$\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Supposons que $H(x, y, z)$ alors $x, y\ et\ z$ vérifient le système suivant : $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \\ 2x + y - 2z - \frac{13}{2} = 0 \end{cases}$ alors

$2(-1 + 2\alpha) + 2 + \alpha - 2(-1 - 2\alpha) - \frac{13}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ d'où $\boxed{H\left(0, \frac{5}{2}, -2\right)}$

<u>*Solution-Exercice 5*</u>

1- a-



b- L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement affine car les points de ce nuage se répartissent sensiblement autour d'une droite

c- $G(\bar{X},\bar{Y})$ avec $\bar{X} = \frac{1}{6}\sum x_i = 3{,}5$ et $\bar{Y} = \frac{1}{6}\sum y_i = 222{,}5$ donc $\boxed{G(3{,}5\ ;\ 222{,}5)}$

2- on partage ce nuage en deux sous nuages formés chacun par 3 points
soit G_1 le point moyen de la première série alors $G_1\ (2\ ; 175)$
et G_2 le point moyen de la deuxième série alors $G_2(5\ ; 270)$

on peut donc ajuster Y en X par la droite de Mayer $(G_1G_2\ )$ tel que $(G_1G_2\ ): Y = aX + b$ où

$$a = \frac{270 - 175}{5 - 2} = \frac{95}{3} \approx 31{,}66$$

Ainsi $(G_1G_2\ ): Y = 31{,}66X + b$ comme $G(3{,}5\ ;\ 222{,}5) \in (G_1G_2\ )$ alors $222{,}5 = 31{,}66 \times 3{,}5 + b$ donc $b = 111{,}69$

Conclusion : $\boxed{(G_1G_2\ ): Y = 31{,}66X + 111{,}69}$

3- le rang de l'année 2011 est 8 donc pour X = 8, : $Y = 31{,}66 \times 8 + 111{,}69 \approx 364{,}97 \approx 365$
Conclusion : le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2011 est 365