Devoir de Synthèse N°2

04.03.2009

Classe $4^{ème}$sc -

Durée : 3.h

Exercice 1 :(5 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte.

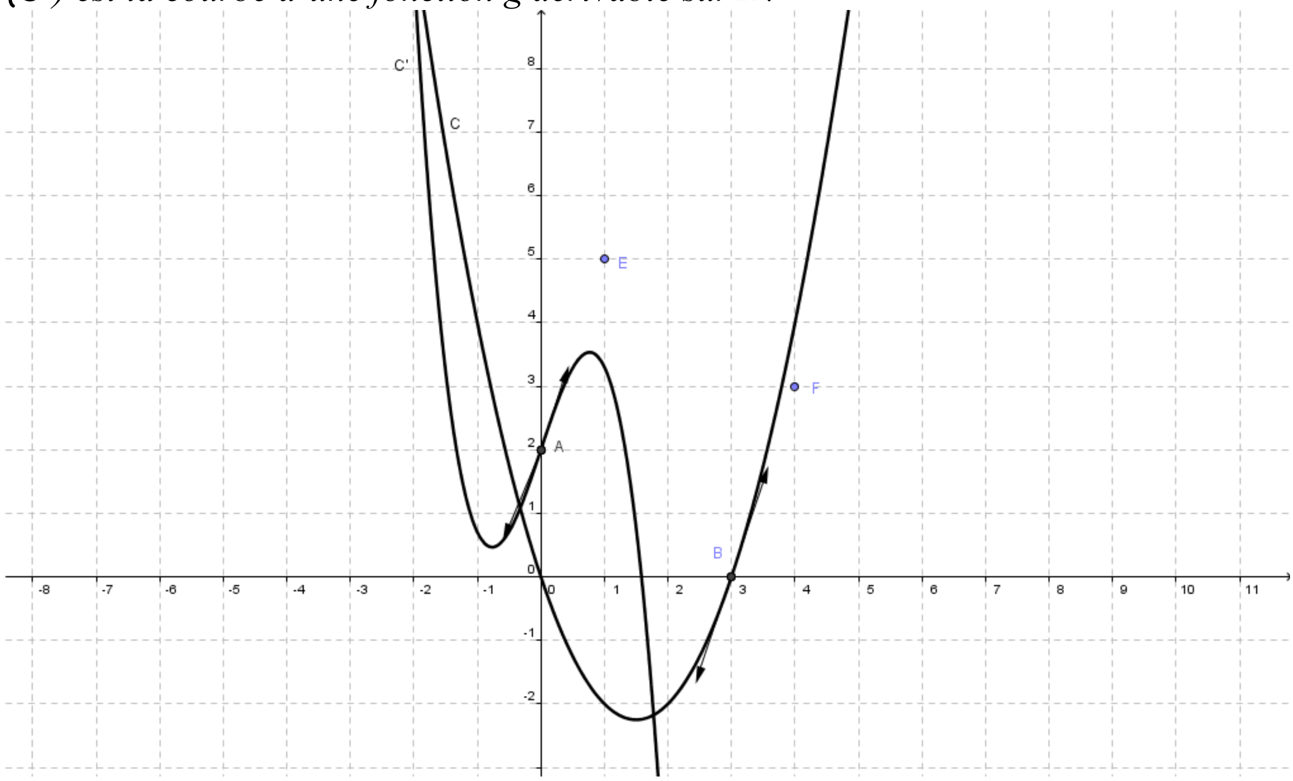
Une réponse exacte (avec justification) rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève $\frac{1}{2}$ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A)

(C) est la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

(C') est la courbe d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$.

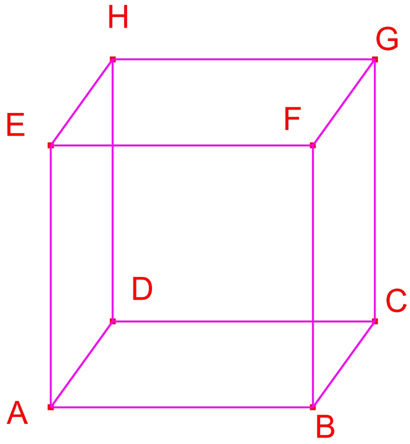


La droite (AE) est la tangente à la courbe (C') au point A.

La droite (BF) est la tangente à la courbe (C) au point B.

1) $f'(3)=$	2) $(g \circ f)'(3)=$	3)
a) $-\frac{1}{2}$	a) 9	a) $2 \leq \int_0^1 g(x)dx \leq 8$
b) 2	b) 0	b) $\int_0^1 g(x)dx \succ 8$
c) 3	c) -2	c) $\int_0^1 g(x)dx \prec 2$

B) On donne le cube ABCDEFGH d'arrête 1.
I le symétrique de E par rapport à A.



1) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} =$	2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} =$
a) $\vec{0}$	a) 0
b) $\overrightarrow{AE}$	b) 1
c) $\overrightarrow{AI}$	c) $\sqrt{3}$

Exercice 2 :(5 points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ *par* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) *Dresser le tableau de variations de f.*

2) *Soit g la restriction de f sur* $]-\infty,-2]$ *.Montrer que g réalise une bijection de* $]-\infty,-2]$ *sur un intervalle I que l'on déterminera.*

3) a) *Calculer* $g(-3)$ *puis* $(g^{-1})'(\sqrt{5}-3)$.

b) *Expliciter* $(g^{-1})(x)$ *pour tout* $x \in I$.

c) *Retrouver, alors,* $(g^{-1})'(\sqrt{5}-3)$.

4) *Montrer que la droite D : y=2x est une asymptote à (C) au voisinage de* $+\infty$.

5) *Tracer les courbes(C) et (C') ((C') est la courbe de g).*

Exercice 3 :(6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les plans :

P : x+y+1=0 , Q : 2x-y+z-1=0 et le point A (2, 1,-2).

1) a)*Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.*

b) *Donner une représentation paramétrique de D.*

c) *Vérifier que* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de D.*

2)a)*Donner une équation cartésienne du plan R passant par A et perpendiculaire à D.*

b) *Calculer d (A, D) la distance de A à D.*

3) *Soit* $S_m : x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 4z + 4 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$

a)Montrer que pour $m \in \mathbb{R}$ S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

b) Déterminer suivant les valeurs de m les positions relatives de S_m et P.

4) a) Pour m=-1, déterminer l'intersection de S_{-1} et Q.

b) Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles à Q et sécants à S_{-1} suivant des cercles de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 :(4 points)

Soit (I_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) *Calculer I_0 et I_1 .*

2) *Montrer, En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \cos x \, dx$*

3) *a) Montrer, En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2 : I_n = n(\frac{\pi}{2})^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$*

b) En déduire I_2 et I_3 .

c) Calculer, alors, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2x + x^2 - x^3)\, \sin x \, dx$

Bon Travail