**Exercice 1 : ( 3 points ) Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).**

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse fausse 0 point.

Dans tout l'exercice le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$

---

**1.** L'application $f: P \to P$, $M(z) \to M'(z')$ tq $z' = -2iz + 2 - i$ est :

A une homothétie de rapport -2

B la similitude directe de centre $\Omega(\frac{-2i}{-1+i})$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

C la similitude directe de centre $\Omega(-i)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

---

**2.** On donne $f: P \to P$, $M(z) \to M'(z')$ tq $z' = (1+i)z + 3 - i$ et $g: P \to P$, $M(z) \to M''(z'')$ tq $z'' = 4(-1+i)z - i$

alors fog est :

A une homothétie de rapport 8

B une homothétie de rapport (-8)

C une homothétie de rapport (-16)

---

**3.** $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx =$

A $\frac{1}{16}$

B $-\frac{1}{16}$

C $\frac{3}{16}$

---

**4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^2 (1+2x+3x^2+....+(n+1)x^n dx =$

A $2^{n+1} - 2$

B $2^{n+2} - 2$

C $2^n - 1$

**Exercice 2 :** **( 6 points )**

Le pan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que AB = AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] et [BC]

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur B et C sur A. Caractériser f.
   b. Déterminer f(J)
   c. Caractériser l'application $g = r_{(O,\frac{\pi}{2})} o t_{\overrightarrow{BO}}$.
   d. Montrer que $f^{-1}og$ est une translation dont on précisera le vecteur.
2. On pose $h = foS_{(AC)}$.
   a. Préciser h(A) et h(C).
   b. Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
3. On désigne par D le symétrique de I par rapport à A.
   Soit S la similitude directe qui envoie D sur B et J sur C.
   a. Montrer que S est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   b. Prouver que J est l'orthocentre du triangle BCD.
   c. Soit $\Omega$ le point d'intersection des droites (CD) et (BJ). Déterminer S((BJ)) et S((CD)).
   En déduire que $\Omega$ est le centre de S.

**Exercice 3 :** **( 6 points )**

Soit f la fonction définie sur $I = [-2,2]$ par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

On désigne par $\Gamma$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ .

1. a. Etudier la parité de f.
   b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2, interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Etudier les variations de f.
   b. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\Gamma$ au point d'abscisse 0.
   Préciser la position de $\Gamma$ et T sur $[0,2]$.
   c. Tracer $\Gamma$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$
   a. Montrer que g est une bijection de $J$ sur $I$
   b. Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $g^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \int_0^1 x^n\sqrt{4-x^2}dx$.
   a. Calculer $U_1$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq 0$.
   c. Montrer que $(U_n)$ est monotone, en déduire qu'elle est convergente.
   d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \leq \frac{2}{n+1}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

**Exercice 4** : ( 5 points )

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ : $f(x) = \dfrac{1}{1-tg(\frac{x}{2})}$

1. a. Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

b. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout $x\in[1,+\infty[$ on a : $(f^{-1})'(x)=\dfrac{2}{2x^2-2x+1}$

2. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=f^{-1}(\frac{2x-1}{2x-2}) & \text{si } x\succ 1 \\ g(1)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

a. Montrer que g est continue à droite en 1.

b. Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$ $g'(x) = -(f^{-1})'(x)$

c. En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$ : $g(x) + f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Prouver alors que g est dérivable à droite en 1 et préciser $g'_d(1)$ .

d. Dans le graphique ci-dessous on a représenté l'allure de la courbe $\Gamma$ de f dans un repère orthonormé. Tracer la courbe $\Gamma'$ de la fonction $f^{-1}$ ainsi que la courbe $\Gamma''$ de la fonction g a partir de celle de f dans le même repère.

# Feuille à rendre

**NOM :** **PRENOM :** **CLASSE :** **№ :**