

Devoir de contrôle n°2  
Mathématiques

Classe : 4 M

Exercice 1 : ( 4 points)

Une ou plusieurs réponses peuvent être correctes. Recopier le tableau ci-dessous et compléter par **Vrai** ou **Faux**. Aucune justification n'est demandée.

- Déterminer  $x$  sachant que  $1219 \equiv x[11]$  avec  $-11 < x < 11$ .  
a)  $x = 9$  ,    b)  $x = 0$  ,    c)  $x = -2$  ,    d)  $x = -9$ .
- Les congruences suivantes sont elles exactes ?  
a)  $1458 \equiv 13(\text{mod}17)$  ;                      b)  $1458 \equiv -21(\text{mod}17)$ ;  
c)  $1458 \equiv 1450(\text{mod}17)$ ;                      d)  $1458 \equiv 1424(\text{mod}17)$ .

	a)	b)	c)	d)
Question 1				
Question 2				

Exercice 2 : ( 3 points)

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[-1 ; 1]$  par  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{5 - 2x^2}}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de  $h$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

- Déterminer la primitive  $H$  sur  $[-1 ; 1]$  de la fonction  $h$  qui s'annule pour  $x = 0$ .
- Sans tracer la courbe (C), donner l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives  $x = 0$  ,  $x = 1$  et  $y = 0$ .

Exercice 3: (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  par  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

- Etudier les variations de  $f$  et construire (C).
- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[1, +\infty[$ .

3. On désigne par  $g$  la fonction réciproque de  $f$ .

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que :  $g'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) Calculer  $g(1)$ ,  $g(\sqrt{2})$  et  $g(2)$  puis tracer la courbe représentative  $(C')$  de  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Exercice 4 : ( 7 points)

---

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct  $BCD$ .  
On désigne par  $I$  le centre de gravité de  $BCD$  et par  $A$  le symétrique de  $I$  par rapport à la droite  $(BD)$ .

Soit  $s$  la similitude directe qui envoie  $A$  sur  $B$  et  $B$  sur  $C$ .

1. a) Montrer que le rapport de  $s$  est  $\sqrt{3}$  et qu'un angle de  $s$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

b) Prouver que  $S(I) = D$ .

2. On désigne par  $J$  le milieu du segment  $[AI]$ .  
Déterminer  $S(J)$ . En déduire le centre de  $s$ .

3. On considère l'application  $\sigma = s \circ s \circ S_{(BD)}$ .

a) Montrer que  $\sigma$  est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Déterminer  $\sigma(J)$  et  $\sigma(I)$ .

c) En déduire le centre et l'axe de  $\sigma$ .

Exercice 1 :

	a	b	c	d
Question 1	Vrai	Faux	Vrai	Faux
Question 2	Vrai	Vrai	Faux	Vrai

Exercice 2 :

1. Pour tout x de ]-1, 1],  $h(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(-4x)}{\sqrt{5-2x^2}}$ .

Une primitive de h sur [-1, 1] est  $x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{5-2x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ .

Ainsi  $H(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{5-2x^2} + c$ .

$H(0) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Il en résulte que : pour tout x de [-1, 1],  $H(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{5-2x^2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

2.  $\mathcal{A} = \int_0^1 h(x)dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ .

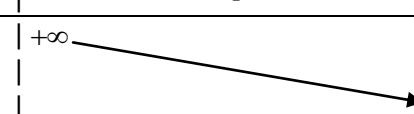
Exercice 3 :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

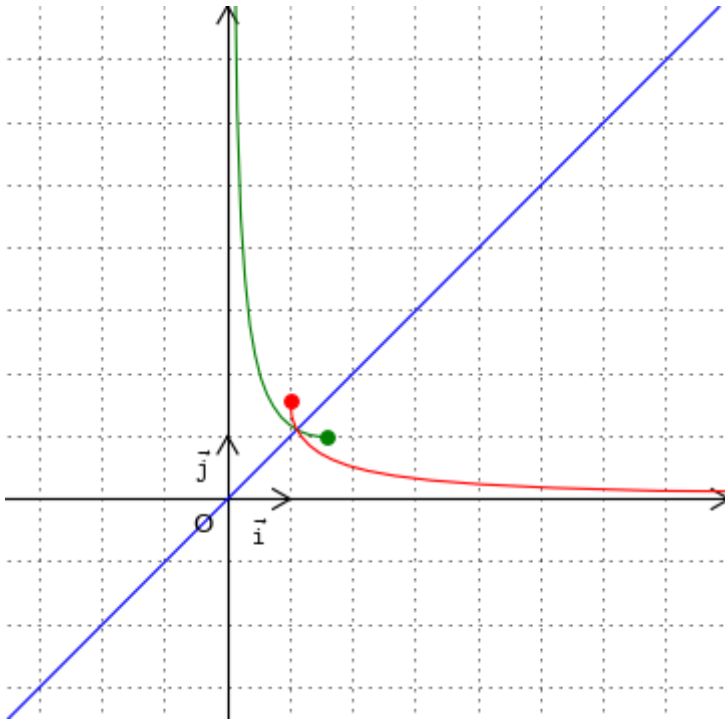
f est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et pour tout x de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \leq 0$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		0
f(x)	$+\infty$	1



La droite  $(O, \vec{j})$  est asymptote à (C).



2.  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{sur } f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = ]1, +\infty[.$$

3. a)  $f$  est dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x$  de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  donc la fonction réciproque

$$f^{-1} \text{ de } f \text{ est dérivable sur } f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = ]1, +\infty[.$$

$$\begin{cases} x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in ]1, +\infty[ \\ f^{-1}(y) = x \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\text{Or } y = f(x) = \frac{1}{\sin x} \text{ alors } \sin x = \frac{1}{y}.$$

$$\text{Comme } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ alors } \cos x > 0 \text{ et } \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

$$\text{Par conséquent, } (f^{-1})'(y) = -\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}} = -\frac{1}{y\sqrt{1 - y^2}}.$$

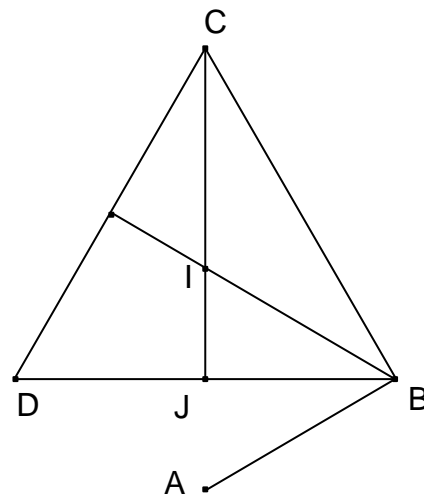
Par suite, pour tout  $x$  de  $]1, +\infty[$ ,  $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

b)  $g(1) = \frac{\pi}{2}$  ;  $g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$  ;  $g(2) = \frac{\pi}{6}$ .

Exercice 4 :

1.a)  $S_{(BD)}(I) = A$  donc  $(\widehat{BI, BD}) \equiv (\widehat{BD, BA}) [2\pi]$  or (BI) est la bissectrice intérieure de l'angle  $(\widehat{BC, BD})$ , il en résulte que :

$$\begin{aligned} (\widehat{BI, BD}) &\equiv (\widehat{BC, BI}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ \text{Ainsi } (\widehat{BC, BA}) &\equiv 3(\widehat{BC, BI}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \frac{BC}{AB} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} &\quad \text{et } (\widehat{AB, AC}) \equiv \pi + (\widehat{BA, BC}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$



Ainsi, le rapport de la similitude directe  $s$  est  $\sqrt{3}$  et un angle de  $s$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

b) Posons  $S(I) = I'$ , le triangle  $ABI$  est équilatéral direct donc son image  $BCI'$  par  $s$  est un triangle équilatéral direct. Comme  $BCD$  est un triangle équilatéral direct alors  $I' = D$ .

Par suite,  $s(I) = D$ .

- 2. J est milieu du segment  $[AI]$  donc  $s(J)$  est milieu du segment  $s([AI]) = [BD]$ . D'où  $s(J) = J$ .
- 3. a)  $\sigma$  est la composée de deux similitudes directes de même rapport  $\sqrt{3}$  et d'une similitude indirecte de rapport donc  $\sigma$  est une similitude indirecte de rapport  $(\sqrt{3})^2 \times 1 = 3$ .

b) On a :  $\sigma(J) = (s \circ s \circ S_{(BD)})(J) = (s \circ s)(J) = s(J) = J$

et  $\sigma(I) = (s \circ s \circ S_{(BD)})(I) = (s \circ s)(A) = s(B) = C$ .

c)  $\sigma$  est une similitude indirecte de rapport 3, différent de 1, et  $\sigma(J) = J$  donc J est le centre de  $\sigma$ . D'autre part : J, I et  $\sigma(I) = C$  sont alignés tels que  $\overline{JC} = 3\overline{JI}$ , il en découle que (IC) est l'axe de  $\sigma$ .