Lycée Pilote Bourguiba Tunis
Mrs : Khaled-Zaalani-Masmoudi

04/02/2008
4° maths

Devoir de contrôle N°2

Exercice 1 : (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne la transformation S d'écriture complexe : $z' = (1+i)(z+2)$. Pour chaque question cocher la ou les bonnes réponses.

1) S est une similitude :

   □ a) directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ □ b) indirecte de rapport 2

   □ c) directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ □ b) Rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) Soit Ω le centre S. Alors les coordonnées de Ω sont :
   □ a) (1,-1) □ b) (-1,1) □ c) (2,-2) □ d) (-2,2)

3) L'image par S de l'axe $(O, \vec{u})$ est :

   □ a) $(O, \vec{v})$ □ b) $(O, \vec{u})$ □ c) $\Delta : y = x$ □ d) $\Delta' : y = -x$

4) Soit M un point de $(O, \vec{u})$ et $M' = S(M)$. Alors :

   □ a) $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires □ b) $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux

   □ c) $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{MM'} = 0$ □ d) Le triangle $\Omega MM'$ est isocèle

Exercice 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 2AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On pose I le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On considère la similitude indirecte f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = A$.

1) Déterminer le rapport de f.
2) Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à D.
3) Construire $D' = f(D)$.
4) Soit Δ la médiatrice de $[AD]$. Vérifier que $\Omega \in \Delta$ et que Δ est l'axe de f.
5) On rapporte le plan au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$.
   a) Déterminer l'écriture complexe de f.
   b) En déduire l'affixe de Ω et une équation de Δ.

Exercice 3 : (5 points)

1) Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

a) Vérifier que pour tout $k \in E$, on a : $k!\,C_{11}^{k} = 11 \times 10 \times \ldots \times (12-k)$.

b) Montrer alors que pour tout $k \in E$, $C_{11}^{k} \equiv 0 \pmod{11}$.

c) En déduire que pour tous les entiers a et b : $(a+b)^{11} \equiv a^{11} + b^{11} \pmod{11}$.

2) a) Montrer que pour tout entier n : $n^{11} \equiv n \pmod{11}$.

b)Montrer que pour tous les entiers a et b :

$\left[a^{11} + b^{11} \equiv 0 \pmod{11}\right]$ si et seulement si $\left[a + b \equiv 0 \pmod{11}\right]$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} -40 \leq x \leq 40 \\ x^{11} + 2048 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$.

Exercice 4 : (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}, \text{ si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) = 2n + 2 \end{cases}$. On pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

1) Montrer que la suite U est bien définie et calculer U_0 .

2) Montrer que pour tout entier n : $U_{n+1} - U_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. En déduire que pour tout n,

$U_n = 2\sum_{p=0}^{n} \dfrac{(-1)^p}{2p+1}$.

3) Calculer pour $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{2p}dx$. En déduire que pour tout n : $U_n = 2\int_0^1 \dfrac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1 + x^2}dx$

4) Montrer que pour tout n, $\left|U_n - 2\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{2}{2n+3}$. En déduire que U est convergente.

N.B : On donne : $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$.