Devoir de Contrôle N°02
Durée : 02 h

Classe : $4^{\text{ème}}$ Maths

NB: Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la présentation des copies .

***EXERCICE N° 01*(3 pts) :**

Cocher la réponse exacte avec **justification**.

Une bonne réponse rapporte $0,75$ point .Une mauvaise réponse ou absence de réponse enlève $0,25$ point . Si le total des points est négatif , la note globale sera ramenée à 0.

1/ Le nombre de diviseur de $15!$ est :

* 3204 ☐ ; * 3024 ☐ ; *2304 ☐ ; * 4032 ☐

2/ La somme des chiffres de $10^{2008}-2008$ est :

* 68310 ☐ ; * 18630 ☐ ; * 68031 ☐ ; * 18063 ☐

3/ Le reste de la division euclidienne de 32^{45} par 7 est :

* 1 ☐ ; * 2 ☐ ; * 3 ☐ ; * 4 ☐

4/ Le quotient de -24 par 5 est :

* -5 ☐ ; * 0 ☐ ; * 5 ☐ ; * 1 ☐

***EXERCICE N° 02*(4 pts) :**

Soit f une fonction dérivable sur $[a\,,b]$ et sa dérivée f' est continue sur $[a\,,b]$.

1/ Montrer que : $\int_a^b x\,f'(x)dx+\int_a^b f(x)dx=b\,f(b)-a\,f(a)$.

2/ a) Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$.

b) En déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

***EXERCICE N° 03*(4 pts) :**

Soit $g(x)=\sqrt[3]{2cos(x)-1}$; $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$

1/ Etudier la dérivabilité de g .

2/ Montrer que g réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3/ Soit g^{-1} la réciproque de g ; Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$.

4/ Déterminer le domaine J de dérivabilité de g^{-1}.

5/ Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in J$.

***EXERCICE N° 04*(4 pts) :**

1/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$, On a :

a) $\displaystyle\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| dx = \frac{2}{n}$.

b) $\displaystyle\frac{2\pi^2 k^2}{n^3} \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} x^2 \left|\sin(nx)\right| dx \leq \frac{2\pi^2 (k+1)^2}{n^3}$

2/ En déduire que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\frac{(n-1)(2n-1)\pi^2}{3n^2} \leq \int_0^{\pi} x^2 \left|\sin(nx)\right| dx \leq \frac{(n+1)(2n+1)\pi^2}{3n^2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} x^2 \left|\sin(nx)\right| dx = \frac{2\pi^2}{3}$.

On donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

***EXERCICE N° 05*(5 pts) :**

On considère un triangle OA_0B_0 équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $OA_0 = 6cm$.

On définit deux suites de points du plan $\mathscr{P}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

***** $A_{n+1} = A_n * B_n$; ***** $B_{n+1} = S_{(OB_n)}(A_{n+1})$

1/ Représenter le triangle OA_0B_0 puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 et B_3.

2/ Soit S la similitude directe de centre O et qui transforme A_0 en A_1.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S .

b) Montrer que $S(B_0) = B_1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S(A_n) = A_{n+1}$ et $S(B_n) = B_{n+1}$.

3/ Montrer que les points O , A_n et A_p sont alignés si , et seulement si $p \equiv n[6]$.