DEVOIR DE SYNTHESE N°1

AFIF BEN ISMAIL

CLASSE : 4éme MATHEMATIQUES

EPREUVE MATHEMATIQUES

Durée 3 h | Date 2010-2011

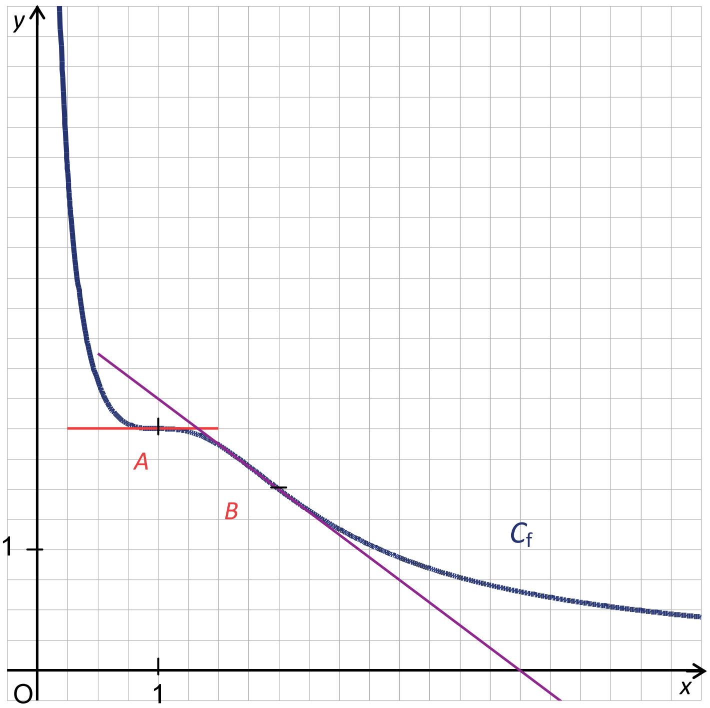
Exercice 1 : (3 points)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une et une seulement est exacte. Indiquez sur vôtre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction continue sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[. On suppose que f(0) = 0 et f(1) = 1.
   a) La fonction g définie sur [0, 1] par g(x) = f(x) – x admet un extremum local sur]0, 1[;
   b) La fonction f est croissante sur [0, 1] ;
   c) Pour tout c appartenant à]0, 1[, on a : $f'(c) \neq 1$

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
   a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
   b) (u_{2n}) est une suite croissante;
   c) les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes .

3. Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée *C*f d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. On sait que :
   Les droites d'équation respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe *C*f ;
   la courbe *C*f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point *A* d'abscisse 1 ;
   la tangente à la courbe *C*f au point $B\left(2;\frac{3}{2}\right)$ passe par le point de coordonnées $(4;0)$



a) La courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} admet deux points d'inflexion.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 0$;

c) f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

http://afimath.jimdo.com/

Exercice 2 : (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=x^3+5x-1$.
   a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que l'équation $x^3+5x=1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   c) Etablir que $0<\alpha<\frac{1}{5}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'équation $\left(E_n\right):x^3+5x=n$.
   a) Justifier que pour tout entier $n\geq 1$, l'équation $\left(E_n\right)$ admet une et une seule solution α_n dans $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$.
   c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\alpha\leq\alpha_n\leq\sqrt[3]{n}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}=0$.
   d) Justifier que pour tout $n\geq 1$, $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3+5\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)=1$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}=1$.
3. On pose $\left(F_0\right):5x=1$ et pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation $\left(F_n\right):x^n+5x=1$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $\left(F_n\right)$ admet une et une seule solution β_n dans $\left[0,+\infty\right[$.
   b) Calculer β_0, β_1 et β_2. Démontrer que pour tout entier n, $0<\beta_n\leq\frac{1}{5}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\beta_n\right)^n$.
   c) En utilisant l'équation satisfaite par β_n, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ et soit O le milieu de [AC].
On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC). Soit J le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(O) = D.
   b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
   c) Soit K = f(I). Montrer que K est le milieu de [BD] et en déduire que les points O, J et K sont alignés.
2. On pose g = $S_{(BO)}\circ S_{(AB)}\circ f^{-1}$.
   a) Déterminer g(B) et g(C).
   b) En déduire que $f^{-1}=S_{(AB)}\circ S_{(BO)}$.

3. On pose h = $S_{(OD)} \circ f^{-1}$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].
   Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que h(M) = f^{-1} (M).

5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)z + 1 = 0$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).
   On mettra les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle où z_1 est celle dont la partie imaginaire est négative .
   b) On désigne par M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et $z_3 = i$.
   Déterminer la valeur de θ pour laquelle $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.
   c) Faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Dans tout ce qui suit , on prend : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\left(-\sqrt{3} + i\right)$.
   Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_1)$ puis placer le point M_4.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
   Calculer l'affixe z_5 du point $M_5 = r(M_1)$ puis placer le point M_5.

4. On désigne par z_6 l'affixe du point M_6 le symétrique de M_3 par rapport à O.
   Montrer que les racines sixièmes de (−1) sont z_k , avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Ecrire le polynôme $z^6 + 1$ sous forme de produit de trois polynômes de second degré à coefficients réels.