Durée de l'épreuve : 3H

# Devoir de synthèse n°1

## Classe : 4M2

AFIF BEN ISMAIL

## Exercice n°1

*Répondre par vrai ou faux (aucune justification n'est demandée)*

1) Si une suite $(u_n)$ est divergente alors l'une au moins des suites $(u_{2n})$ ou $(u_{2n+1})$ est divergente.
2) Si $z = \sqrt{3} + i$ alors $z^{2010} \in \mathbb{R}$
3) Un antidéplacement qui admet au moins un point fixe est une symétrie orthogonale.
4) Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors sa courbe représentative admet au moins une tangente horizontale

## Exercice n°2

Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $f(z) = z^3 - (2\cos\theta + i)z^2 + (1 + 2i\cos\theta)z - i$

1) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire $z_0$ que l'on déterminera.

b) Déduire alors les deux autres solutions de l'équation $f(z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $i$, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

a) Déterminer le réel $\theta_0$ pour lequel le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

b) Vérifier que le parallélogramme ainsi obtenu est un losange.

c) Déterminer et caractériser, dans ce cas, toutes les isométries qui transforment C en B et B en A.

## Exercice n°3

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit D le point de P te que le triangle CDA soit rectangle et isocèle et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1) Faites une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2) Soit $R_A$ la rotation de centre $A$ transformant $B$ en $C$ et $R_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = R_C o R_A$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

b) Démontrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté $O$. Placer $O$ sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$.

3) On pose $g = foS_{(BC)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

b) Montrer que $g$ ne peut pas etre une symétrie orthogonale et déduire alors sa nature.

4) On note $H$ le milieu de $[BC]$ et $H' = g(H)$.

a) Montrer que $H'$ est le milieu de $[OD]$.

b) Donner la forme réduite de $g$.

## Exercice n°4

Soit $f$ la fonction définie sur $D = ]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche en -2 et à droite en 0.
Interpréter les résultats trouvés.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $D \setminus \{-2, 0\}$ et vérifier que $f'(x) < 0$ pour $x < -2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

b) Dresser le tableau de variations de $f$.

3) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = -2x - 1$ est une asymptote à $(C)$ au voisinage de $-\infty$

4) Tracer $\Delta$ et $(C)$.

5) Soit $(C')$ le symétrique de $(C)$ par rapport au point $I(-1, 0)$.

a) Monter que pour tous points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ on a :

$$M' = S_I(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$

b) Soit $g$ la fonction qui admet pour représentation graphique la courbe $(C')$.
Montrer que $g$ est définie sur $D$ par $g(x) = -x - 2 - \sqrt{x^2 + 2x}$.

# Solutions

## Solution de l'exercice 1

***1) Faux***

*Prenons* $u_n = (-1)^n$. *On a :* $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, *elle converge vers 1 et* $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, *elle converge vers* $-1$ *alors que la suite* $(u_n)$ *est divergente.*

***2) Vrai :*** $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^{2010} = 2^{2010} e^{i\frac{2010\pi}{6}} = 2^{2010} e^{i(335\pi)} = -2^{2010}$

***3) Vrai*** ***4) Vrai.*** *(Résultats de cours)*

## Solution de l'exercice 2

*1) a) Soit y un réel*

$$f(iy) = 0 \Leftrightarrow (iy)^3 - (2\cos\theta + i)(iy)^2 + (1 + 2i\cos\theta)(iy) - i = 0$$
$$\Leftrightarrow -iy^3 + (2\cos\theta + i)\, y^2 + (i - 2\cos\theta)\, y - i = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\cos\theta y^2 - 2\cos\theta y\right) + i\left(-y^3 + y^2 + y - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y\cos\theta(y-1) = 0 \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

*Donc i est la solution imaginaire de l'équation.*

*b) Puisque i est une solution de l'équation* $f(z) = 0$ *alors f(z) est factorisable par* $z - i$.

*Donc* $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$ *où a, b et c sont des nombres complexes.*

*Après développement et identification des coefficients on trouve:*

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -2\cos\theta - i \\ c - ib = 1 + 2i\cos\theta \\ -ic = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = -2\cos\theta \\ c - ib = 1 + 2i\cos\theta \quad \text{vrai} \end{cases}$$

*Donc* $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-i)(z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1)$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = i \quad ou \quad z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$$
$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$$

*Donc les deux autres solutions sont:* $z' = \dfrac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

*et* $z'' = \dfrac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

2) $\dfrac{Aff(\overrightarrow{OB})}{Aff(\overrightarrow{OC})} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \notin \mathbb{R}$ *(car* $2\theta \in \left]0,\pi\right[ \Rightarrow \sin(2\theta) \neq 0$*)*

*D'où les points O, A et B ne sont pas alignés pour tout réel* $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

*Alors OABC est un parallélogramme* $\Leftrightarrow O * B = A * C$

$$O * B = A * C \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}}{2} = \frac{i + e^{-i\theta}}{2} \Leftrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = i \Leftrightarrow 2i\sin\theta = i \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

*Ce qui donne* $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *(car* $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$*)*

c) $OA = |i| = 1$ et $OC = \left|e^{-i\theta}\right| = 1 \Rightarrow OA = OC$ *et en plus OABC est un parallélogramme donc OABC est un losange.*

d) *OABC est un losange donc* $BC = AB \neq 0$ *et par suite il existe un seul déplacement f et un seul antidéplacement g tq* $f(C) = g(C) = B$ *et* $f(B) = g(B) = A$.

<u>*Détermination du déplacement f*</u>

*On a :* $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BA}$ *ce qui prouve que f n'est pas une translation et par suite c'est une rotation. (les seuls déplacements sont les translations ou les rotations)*

*Le centre de la rotation f est l'intersection des médiatrices des segments* $[AB]$ *et* $[BC]$.

*Et puisque* $f(B) = A$ *alors son angle* $\theta$ *est donné par:*

$$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \arg\left(\frac{i}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right) \equiv \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

<u>*Détermination de l'antidéplacement g*</u>

*Un antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.*

*Supposons que g est une symétrie orthogonale d'axe D*

*Puisque* $g(B) = A$ et $g(C) = B$ *alors la droite D est à la fois médiatrice de* $[AB]$ *et médiatrice de* $[BC]$ *donc* $(AB) \parallel (BC)$ *ce qui est impossible.*

*Donc g est une symétrie glissante. On note* $\Delta$ *son axe et* $\vec{u}$ *son vecteur.*

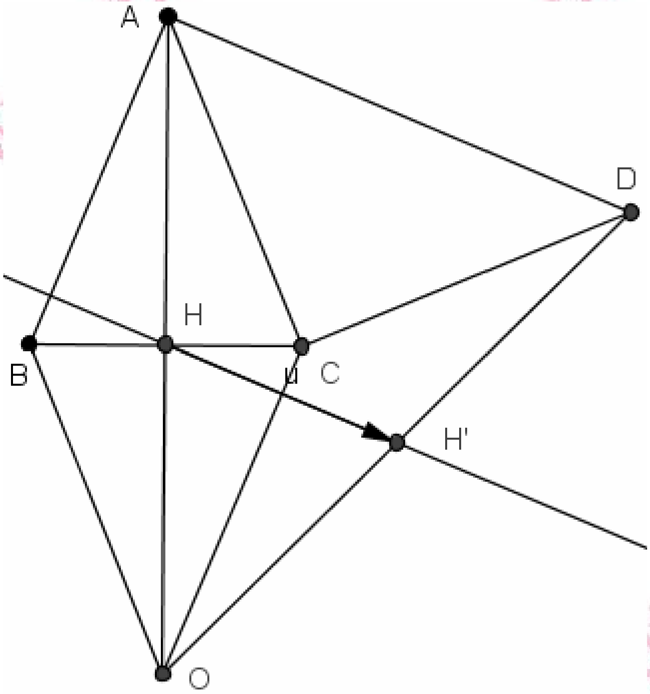
$$\begin{cases} g(B) = A \\ g(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = A * B \in \Delta \\ J = B * C \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (IJ)$$

$g = S_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_\Delta \Rightarrow gog = t_{\vec{u}} o S_\Delta o S_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$ *Or* $gog(C) = g(g(C)) = g(B) = A$

*Donc* $t_{2\vec{u}}(C) = A$ *ce qui donne* $2\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ *ou encore* $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{JI}$

## Solution de l'exercice 3

1)




2) a) $f(A) = R_C(R_A(A)) = R_C(A) = D$ *car* $CA = CD$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

$f(B) = R_C(R_A(B)) = R_C(C) = C$.

b) $R_A(B) = C$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ *donc* $R_A$ *est une rotation d'angle* $\frac{\pi}{4}$.

$f$ *est la composée de deux rotations dont la somme des angles*

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \neq 2k\pi$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *donc* $f$ *est une rotation d'angle* $-\frac{\pi}{4}$.

$f(A) = D$ et $f(B) = C$ *donc son centre* $O$ *est l'intersection des médiatrices des segments* $[AD]$ *et* $[BC]$.

c) $AB = AC$ et $OB = OC$ *donc* $(OA)$ *est la médiatrice de* $[BC]$.

$\widehat{BAO} = \widehat{AOC} = \frac{\pi}{8}$ *(alternes internes)* $\Rightarrow (AB)//(OC)$

$\widehat{BOA} = \widehat{OAC} = \frac{\pi}{8}$ *(alternes internes)* $\Rightarrow (OB)//(AC)$

*D'où* $OBAC$ *est un parallélogramme, et puisque* $AB = AC$ *donc c'est un losange.*

3) a) $g(A) = f(S_{(BC)}(A)) = f(O) = O$ ($OBAC$ *est un losange donc* $S_{(BC)}(A) = O$).

$g(B) = f(S_{(BC)}(B)) = f(B) = C$ .

*b) Si g est une symétrie orthogonale alors son axe est à la fois médiatrice de* $[OA]$ *qui est (BC) et médiatrice de* $[BC]$ *qui est (OA) ce qui est impossible.*

*g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement. En plus g ne peut pas être une symétrie orthogonale, donc c'est une symétrie glissante. On note* $\Delta$ *son axe et* $\vec{u}$ *son vecteur.*

*4) a)* $H = B * C = A * O$ *car* $OBAC$ *est un losange.*

*g est une isométrie donc elle conserve le milieu d'un segment.*

*Ce qui permet de dire que* $g(H) = g(A) * g(O)$ *avec* $g(A) = O$

*et* $g(O) = f(S_{(BC)}(O)) = f(A) = D$ *d'où* $H' = O * D$ .

*b)* $g = S_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_\Delta$

$$\begin{cases} g(A) = O \Rightarrow A * O = H \in \Delta \\ g(O) = D \Rightarrow O * D = H' \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta = (HH')$$

$$H \in \Delta \Rightarrow g(H) = t_{\vec{u}}(H) = H' \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{HH'} .$$

## Solution de l'exercice 4

1)

$$\lim_{x\to(-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{\sqrt{x^2+2x} - x - 2}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2} - 1$$
$$= \lim_{x\to(-2)^-} \frac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}} - 1 = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}} - 1 = -\infty$$

*Donc f n'est pas dérivable à gauche en* $-2$ .

$$\lim_{x\to 0^{+-}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^{+-}} \frac{\sqrt{x^2+2x} - x}{x} = \lim_{x\to 0^{+-}} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} - 1$$
$$= \lim_{x\to 0^{+-}} \frac{x^2+2x}{x\sqrt{x^2+2x}} - 1 = \lim_{x\to 0^{+-}} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}} - 1 = +\infty$$

*Donc f n'est pas dérivable à gauche en* $-2$ .

***Interprétation graphique :***

*La courbe (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses -2 et 0.*

*2) a) Pour tout réel x de* $D \setminus \{-2, 0\}$ , $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} - 1 = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$

- *Pour* $x < -2,\ x + 1 < -1 < 0$ *donc* $f'(x) < 0$ .

- *Pour* $x > 0$ *on a* :

$$f'(x) = \frac{(x+1) - \sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{\sqrt{x^2+2x}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)} > 0$$

*b)*

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | | $0$ | ↗ | $1$ |

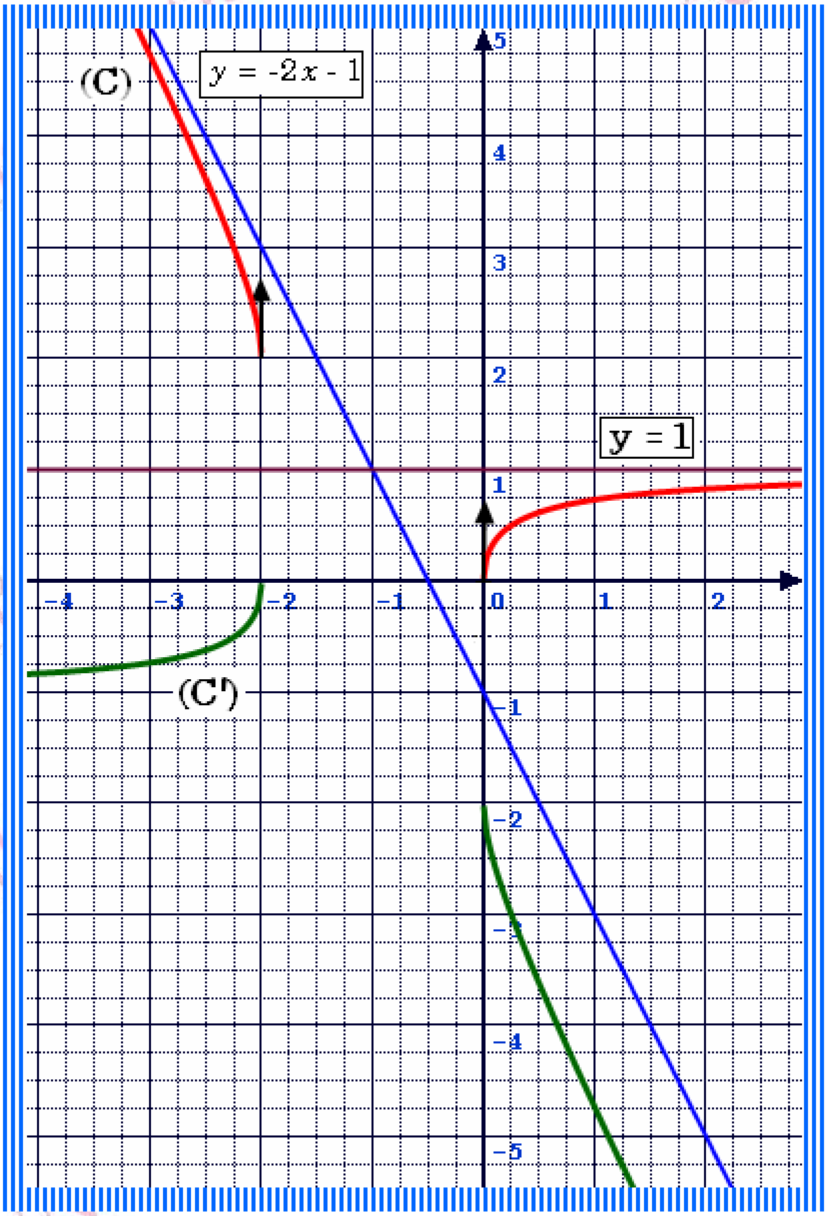
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$$

*3)*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-2x-1)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x + 1$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} + (x+1)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)} = 0$$

*Donc* $\Delta : y = -2x - 1$ *est une asymptote à la courbe* $(C)$ *au voisinage de* $-\infty$.

*4)*



5) a) $M' = S_I(M) \Leftrightarrow I = M * M' \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{x + x'}{2} \\ 0 = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$

b) $On\ a\ :\ S_I((C)) = (C')$

$Soient\ M'(x', y')\ et\ M(x, y)\ tels\ que\ S_I(M) = M'$

$M' \in (C') \Leftrightarrow M \in (C) \Leftrightarrow x \in D\ et\ y = f(x) \Leftrightarrow -2 - x' \in D\ et\ \ -y' = f(-2 - x')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x' \leq -2 \\ -2 - x' \geq 0 \end{cases} \text{ et } \quad -y' = \sqrt{(-2 - x')^2 + 2(-2 - x')} - (-2 - x')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' \geq 0 \\ -2 \geq x' \end{cases} \text{ et } \quad y' = -\sqrt{x'^2 + 4x' + 4 - 4 - 2x'} - 2 - x'$$

$$\Leftrightarrow x' \in D \text{ et } \quad y' = -2 - x' - \sqrt{x'^2 + 2x'}$$

<u>**Conclusion :**</u> $M(x, y) \in (C') \Leftrightarrow x \in D$ et $\ y = -2 - x - \sqrt{x^2 + 2x}$