Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°2

Classe : 4M2

:
AFIF BEN ISMAIL

Exercice n°1

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des cotés $[AB]$ *et* $[AD]$.

Partie A

1) *Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en C et B en D.*
   Caractériser f.

2) *Soit g l'antidéplacement qui coïncide avec f sur A et B.*
   a) *Déterminer $gof(C)$ et $gof(D)$.*
   b) *Caractériser gof.*
   c) *En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.*

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *par:*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\cos x} & si\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right] \\ f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x} & si\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.*

1) Montrer que f est continue et dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2) Vérifier que le point $A(0,1)$ *est un centre de symétrie pour la courbe* $\mathscr{C}$.

3) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *On note* f^{-1} *sa fonction réciproque.*

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ *représentative de* f^{-1} *dans le même repère que la courbe* $\mathscr{C}$

5) a) Montrer que f^{-1} *est dérivable sur chacun des intervalles* $]-\infty,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

et que :
$$\begin{cases} \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}} & si\quad x\in\,]-\infty,1[\\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & si\quad x\in\,]1,+\infty[\end{cases}.$$

b) La fonction f^{-1} *est elle dérivable en 1? Justifier votre réponse..*

Correction du devoir de contrôle n°2

Correction de l'exercice n°1

Partie A

1) $AB = CD \neq 0$ donc il existe un seul déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(B)=D$.

Soit θ l'angle du déplacement f.

$$f(A)=C \quad \text{et} \quad f(B)=D \Rightarrow \theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \pi \quad [2\pi]$$

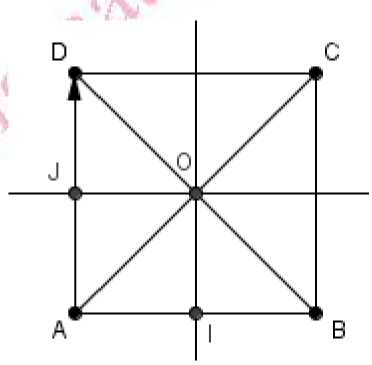
Donc f est une symétrie centrale.

$f(A)=C$ donc O milieu de $[AC]$ est le centre de la symétrie centrale f.

2) a) On a: $f(C) = A$ et $f(D) = B$

Donc $gof(C) = g(A) = C$ et $gof(D) = g(B) = D$.

b) gof est un antidéplacement qui fixe deux points distincts C et D donc c'est la symétrie orthogonale d'axe (CD).



c) $gof = S_{(CD)} \Leftrightarrow g = S_{(CD)} of$

$$\begin{cases} (OI) \perp (OJ) \\ (OI) \cap (OJ) = \{O\} \end{cases} \Rightarrow f = S_{(OJ)} o S_{(OI)}$$

D'où $g = S_{(CD)} o S_{(OJ)} o S_{(OI)}$

$$\begin{cases} (CD) \parallel (OJ) \\ S_{(CD)} o S_{(OJ)}(A) = D \end{cases} \Rightarrow S_{(CD)} o S_{(OJ)} = t_{\overrightarrow{AD}}$$

Alors $g = t_{\overrightarrow{AD}} o S_{(OI)}$ avec $\overrightarrow{AD}$ vecteur directeur de (OI)

Donc g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et d'axe (OI).

http://afimath.jimdo.com/

.

Correction de l'exercice n°2

1) Continuité en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en 0.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos x} = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à gauche en 0.}$$

f est continue à droite et à gauche en 0 donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 0 \times 1 = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\cos x - 1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 0 \times 1 = 0\,D$$

onc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

f dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) *Pour tout réel* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *on a* $-x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Montrons que $f(-x) = 2 - f(x)$

- *Si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ *alors* $-x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et on a:*

$$f(-x) = \frac{2\cos(-x) - 1}{\cos(-x)} = \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 2 - \frac{1}{\cos x} = 2 - f(x).$$

- *Si* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors* $-x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ *et on a :*

$$f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = 2 - \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) = 2 - \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 2 - f(x).$$

D'où A(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) *f est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(évident)*

Calculons $f'(x)$ *pour* $x \neq 0$.

- *Si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $f'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} < 0$

- *Si* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{-2\sin x \times \cos x - (-\sin x)(2\cos x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} < 0$

Tableau de variation de f

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

b) *Voir figue*

4) a) f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *donc f réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ *(=* $\mathbb{R}$*)*

b) Voir figure

5) a) f dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ *et* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $f'(x)\neq 0$

Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$

Donc f^{-1} *est dérivable sur chacun des intervalles* $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\right)$ *et* $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Ou encore respectivement $]1,+\infty[$ *et* $]-\infty,1[$.

- *Si* $x\in]-\infty,1[$, *il existe* $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $f(y)=x$.

$$f(y)=x \Leftrightarrow 2-\frac{1}{\cos y}=x \Leftrightarrow \cos y=\frac{1}{2-x}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{\cos^2 y}{\sin y}=-\frac{\cos^2 y}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \qquad \left(car\ \ y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin y>0\right)$$

$$=-\frac{\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}}=\frac{-1}{\frac{(2-x)^2}{2-x}\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{-1}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

- *Si* $x\in]1,+\infty[$, *il existe* $y\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ *tel que* $f(y)=x$.

$$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos y}=x \Leftrightarrow \cos y=\frac{1}{x}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{\cos^2 y}{\sin y}=\frac{\cos^2 y}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} \qquad \left(car\ \ y\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Rightarrow \sin y<0\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{-\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{-1}{\frac{x^2}{x}\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

b) La courbe $\mathscr{C}'$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1.