http://afimath.jimdo.com/	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	
2010-2011	Durée : 3h ***********4ème Math	Mr : afif ben ismail

Exercice n°1: *(3pts)*

Pour chacune des trois premières questions, choisir la seule réponse correcte (aucune justification n'est demandée).

1) Soit le nombre complexe $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ *, alors on a:*

a) $z^3=1$ b) $z^3=-1$ c) $z^6=-1$

2) Soient I et J deux points distincts. Alors l'application définie par $S_I \circ S_J$ *est :*

a) une rotation b) une symétrie orthogonale c) translation

*3) Soit ABCD un rectangle et soient E=A*B et F=D*C. alors si* $f=t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ *on a:*

a) f est une symétrie glissante b) $f=S_{(EF)}$ c) $f=S_{(BC)}$.

4) Soit f une fonction définie sur IR et deux fois dérivables et (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé et dont le tableau de variation de sa fonction dérivé f ' est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Répondre par "Vrai" ou "Faux" à chaque question:

a) La courbe représentative (ζ) de f admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

b) La courbe représentative (ζ) de f admet exactement deux tangentes horizontales.

c) f est strictement décroissante sur $]-\infty,2]$.

Exercice n°2: *(3pts)*

Soit, dans C, l'équation (E): $z^2-(3+i\sqrt{3})z+2(1+i\sqrt{3})=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z' qu'on déterminera.

2) Déduire l'autre solution z'' de l'équation (E).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ *on donne les points A et B d'affixes respectives 2i et* $1+i\sqrt{3}$.

a) Placer les points A et B sur une figure.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

Exercice n°3: *(7pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct; soit ABCD un carré de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) *Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.*
   a) *Montrer que f([BD])=[BD].*
   b) *Prouver, alors, que f(O)=O et que f(A)=A.*
   c) *En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABD.*

2) *Soit g une isométrie qui transforme le triangle ABD en le triangle BCD.*
   a) *Montrer que l'application* $S_O o g$ *est une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.*
   b) *En déduire toutes les isométries qui transforment le triangle ABD en le triangle BCD.*

3) *On suppose que AB=1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé* $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a) *Déterminer les affixes de chacun des points A, B, C et D.*
   b) *Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que* $z' = -\bar{z} + 1 + i$ *.Montrer que f est une isométrie sans point invariant.*
   c) *Déterminer f(A) et f(B) et déduire la nature de f.*

Exercice n°4: *(7pts)*

Soit la fonction f définie sur]1,2] par $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$ *.On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) *Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2.Interpréter graphiquement le résultat.*
   b) *Justifier que f est dérivable sur]1,2[et que* $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$.

2) a) *Dresser le tableau de variation de f .*
   b) *Tracer la courbe (ζ) de f dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) *Montrer que l'équation f(x)=x admet dans] 1,2] une solution unique* α .
   b) *Montrer que* $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

4) *On pose* $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   a) *Montrer que g est strictement décroissante sur* $[0, +\infty[$.
   b) *Soit la suite réelle définie sur IN par* $U_0=1$ *et* $U_{n+1}=g(U_n)$.
   Montrer que, pour tout n $\in$ *IN, on a:* $U_n \in [1,2]$.

5) *<u>On admet</u> que pour tout* $x \in [1,2]$, $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) *Montrer que, pour tout n* $\in$ *IN, on a:* $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$.
   b) *Prouver que* $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$ *et en déduire la limite de la suite* (U_n).