LYCEE PILOTE ELKEF　　　　DEVOIR DE SYNTHESE N°1　　　　$4^{ème}$ Math
DECEMBRE 2007　　　　MATHEMATIQUES　　　　Durée :3h

EXERCICE 1 (3 points) :QCM

Pour chaque question, choisir la réponse exacte.

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ est prolongeable par continuité en 3 et son prolongement est :

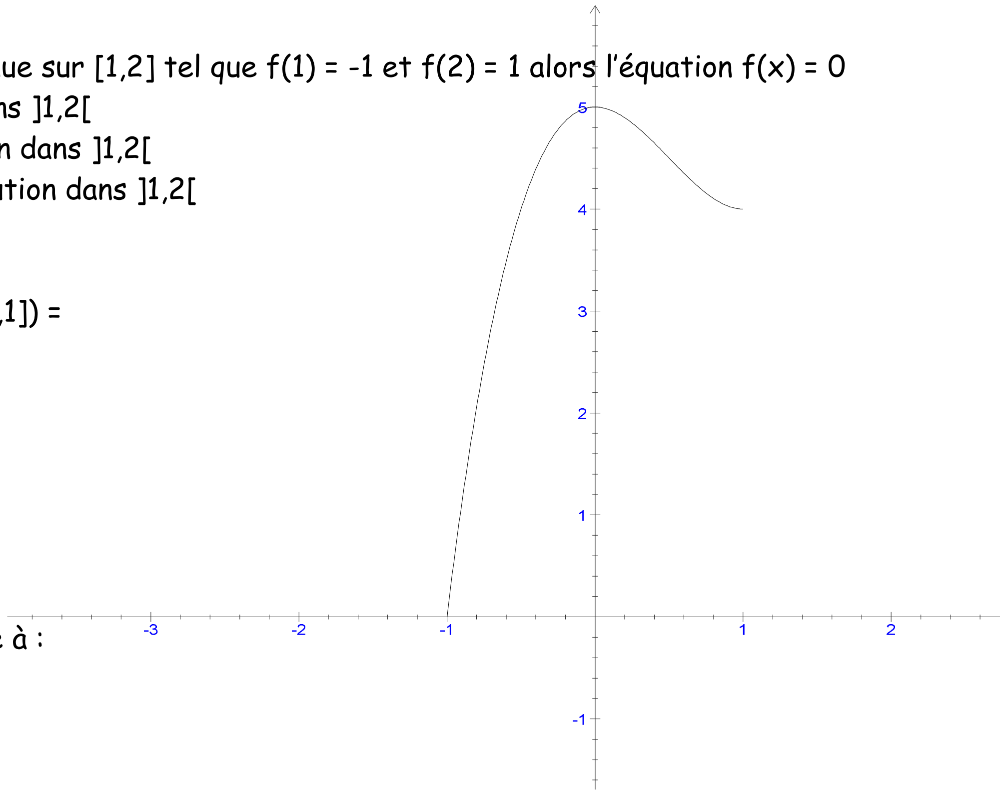
A. $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 3 \\ g(3) = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 3 \\ g(3) = 2 \end{cases}$

C- $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 3 \\ g(3) = -1 \end{cases}$

2) Si f est une fonction continue sur [1,2] tel que f(1) = -1 et f(2) = 1 alors l'équation f(x) = 0
A. n'admet pas de solution dans]1,2[
B. admet au moins une solution dans]1,2[
C. admet exactement une solution dans]1,2[

3) Dans la figure ci-contre f([-1,1]) =
A. [-1,1]
B. [0 ,4]
C. [0,5]



4) La somme $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$ est égale à :
A. 64
B. 0
C. 64 i

5) Soit $Z=\dfrac{z-i}{z-4}$ avec z ≠ 4. On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tel que Ré(Z) =0

Γ' L'ensemble des points M d'affixe z tel que Im(Z) =0

A. Γ et Γ' sont des droites
B. Γ et Γ' sont des cercles
C. Γ et Γ' ont un unique point d'intersection

6) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : z^2 -2m z +1=0 avec $m\in \mathbb{C}^* \setminus \{-1,1\}$. On désigne par z' et z''
Les solutions de (E) alors :
A. $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0\ [2\pi]$
B. $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \pi\ [2\pi]$
C. $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \arg(m)\ [2\pi]$

EXERCICE 2 (3 points)

1) Déterminer les racines 4$^{\text{ièmes}}$ du nombre complexe $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

2) Montrer que : $\frac{2-z}{2+z} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -2i\,tg(\frac{\alpha}{2})$. ($\alpha \neq \pi+2k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$)

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2-z)^4 = a.(2+z)^4$

EXERCICE 3 :(5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout réel $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_\theta) : z^3 - (3 + 2i\sin 2\theta)z^2 + (2 + 4i\sin 2\theta)z - 2i\sin 2\theta = 0.$$

1) a- Vérifier que 1 est une solution de (E_θ) .

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) On considère les points A,M et N d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + e^{i2\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{-i2\theta}$.

Déterminer l'ensemble décrit par les points M lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

4)

a- Montrer que le triangle AMN est isocèle en A .

b- Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

EXERCICE 4 :(3.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x \in \left]-\infty,1\right[\\ f(x) = \dfrac{x^2-x}{1+x} & \text{si } x \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$

1) a- Vérifier que f est continue en 1.

b- Montrer que pour tout $x\in \left]-\infty,1\right[$ on a : $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$.

a- Montrer que g est une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b- Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in$ I .

EXERCICE 5 :(5.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0.+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+2x}{3x}$.

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) Montrer que f est décroissante sur $]0.+\infty[$

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 2$.

3) Pour tout $x\in\,]0.+\infty[$ on pose $g(x) = fof(x)$.

a- Vérifier que pour tout $x\in\,]0.+\infty[$ on a : $g(x) = \frac{2+7x}{3+6x}$.

b- Montrer que pour tout $x,y\in \left[\frac{1}{2},2\right]$ on a : $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{4}|W_n - V_n|$.

b- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|W_n - V_n| \leq \frac{4}{3}(\frac{1}{4})^n$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n - V_n)$

5) a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $V_n \leq W_n$.

b- Prouver alors que les suites (W_n) et (V_n) sont adjacentes et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

.