PROF : Mr Mighri. A Durée : 2 H	Devoir De Contrôle N°1	L. IBN RACHIK	
		4è **Maths**	Date: 16-11-2007

EXERCICE N°1 (5 points)

Compléter la feuille ci – jointe

EXERCICE N°2 (7 points)

1)a) Résoudre dans C, l'équation $(E_\theta)\ :\ Z^2 + i(e^{i\theta} - 2)Z + e^{i\theta} - 1 = 0\ ;\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

b) Donner les solutions de (E_θ) sous forme trigonométrique.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o,u,v), déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $(i - ie^{i\theta})$ lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

3) Soient les points $A(1)$ et $B(i)$ et $f : P\backslash\{B\} \to P\backslash A\}$, $M(Z) \to M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{\overline{Z} - i}{\overline{Z} + i}$

a) Montrer que : si $Z \neq i$ et $|Z| = 1$ alors Z' est imaginaire pur

b) Montrer que les vecteurs AM' et BM sont orthogonaux

c) Construire M' sachant que M désigne un point du cercle trigonométrique privé du point B

4) Soit α un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$

a) Montrer que : si $Z \neq i$ et $\frac{\overline{Z} - i}{\overline{Z} + i} = e^{i\alpha}$ alors $Z = -\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b) Résoudre dans l'équation : $(\overline{Z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\overline{Z} + i)^3$

EXERCICE N°3 (8 points)

1) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

Donner le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

2) Soit (u_n) la suite réelle définie sur par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ n \in \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ on a : 0® $u_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

3)a) Vérifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{tgx}{1 + \sqrt{1 + tg^2 x}} = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

b) Montrer par recurrence que : $u_n = tg\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) On pose pour tout $n \in$ on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$; $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$

a) Calculer v_0 et w_0

b) Montrer que pour tout $n \in$ on a : w_n ® v_n

c) Etudier la monotonie de chacune des suites (v_n) et (w_n)

d) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes vers la même limite l et que $2 - \sqrt{2} \leq l \leq 1$

FEUILLE A RENDRE

VRAI - FAUX :

1) Soit Z un nombre complexe : $Z^2 = 25 \Leftrightarrow Z = 5$ ou $Z = -5$ ☐

2) Soient Z et Z' deux nombres complexes : $|Z| = |Z'| \Leftrightarrow Z = Z'$ ou $Z = -Z'$ ☐

3) Soient $A(Z_A), B(Z_B)$ et $C(Z_C)$ trois points tels que : $Z_B - Z_A = -4i(Z_C - Z_A)$
Les droites (AB) et (AC) sont parallèles ☐

4) Pour tous réels θ et θ' on a : $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)}$ ☐

5) Soit Z un nombre complexe non nul
Si $Z = re^{i\theta}$ ($r \neq 0$ et $\theta \in$) alors $|Z| = r$ et $\arg(Z) \equiv \theta (2\pi)$ ☐

6) Si $Z = a + bi$ ($a \in$, $b \in$) alors $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ☐

7) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
On a (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes ☐

8) Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes
On a (u_n) est une suite convergente ☐

9) Soit (u_n) une suite réelle définie sur
Si (u_n) est croissante et majorée par 3 alors elle converge vers 3 ☐

10) La fonction $f : x \sim \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$; $x \neq 1$ est prolongeable par continuité en 1 ☐

11) L'équation $x^5 + 2x - 7 = 0$ admet dans   une unique solution α ☐

12) Soient a et b deux réels tels que a ® b
Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ☐

13) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[2, 4]$
Si $\begin{cases} f \; est \; continue \; sur \; [2,4] \\ (f(2) - 2008) \times (f(4) - 2008) \text{ ® } 0 \end{cases}$ alors l'équation $f(x) = 2008$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[2, 4]$ ☐

14) Soit f une fonction définie sur un domaine D

Si $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ alors la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote ☐

oblique à la courbe de f au voisinage de $(+\infty)$

15) Soit ,dans , l'équation $(E_\theta) : Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 + \sin\theta = 0$; $\theta \in \left]0,\pi\right[$

Si $Z^{'}$ et $Z^{''}$ sont les solutions de (E_θ) alors $\dfrac{1}{Z^{'}} + \dfrac{1}{Z^{''}} = \dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ ☐

16) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ ☐