Exercice 1 : (3 points) Répondre par : VRAI ou FAUX (Aucune justification n'est demandée)

Dans tout l'exercice le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

1. Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definies par : $U_n=\dfrac{2}{n}$ et $V_n=\dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}\geq 1{,}001.U_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}$

4. Si $f(x)=\sin(\pi\tan(x))$ alors $f'(x)=\pi\cos(\pi\tan(x))$

5. Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $|z|=|z'|$ et $Im(z)=Im(z')$ alors $z=z'$.

6. Si z et z' sont deux nombres complexes d'images M et M' et vérifiant $z.z'=1$ alors $[OI)$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$

Exercice 2 : (3 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB]. On pose $D=S_O(C)$.

1. a. Caractériser l'application $S_{(BI)}oS_{(BO)}$.
   b. Montrer que $R_{(B,-\frac{\pi}{2})}oS_O$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. a. Caractériser l'application $S_{(OI)}oS_{(BD)}$.
   b. Montrer que $t_{\overrightarrow{BA}}oR_{(B,-\frac{\pi}{2})}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
3. Montrer que l'application : $f=S_{(BC)}oS_{(AB)}oS_{(AC)}oS_{(AI)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2-(1+i)e^{i\theta}z+ie^{i(2\theta)}=0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. On désigne par A et B les points de P d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$
   Montrer que OAB est un triangle isocèle rectangle.
3. Pour tout nombre complexe z distinct de $e^{i\theta}$ et de $ie^{i\theta}$ on pose $Z=\dfrac{1+ie^{i(-\theta)}z}{1-e^{i(-\theta)}z}$.

   On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et Z.

a. Montrer que $(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{OM'}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}+(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})[2\pi]$ et que $OM'=\dfrac{MB}{MA}$.

b. En déduire une construction du point M' lorsque M est le barycentre des points pondérés (A , 2) et (B , 1).

Exercice 4 : **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

c. Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α et que $\alpha\in\,]1{,}6\,;1{,}8[$

En déduire que pour tout $x\leq\alpha$ on a : $f(x)\geq x$

2 Tracer Γ.

3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=f(U_n)$.

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}: 0\leq U_n \prec \alpha$.

b. Montrer que la suite (U_n) est montone, en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}: |U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

d. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}: |U_n-\alpha|\leq(\dfrac{1}{2})^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

Exercice 5 : **(4 points)**

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\sin x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe Γ la courbe de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. Par une simple lecture graphique :

Etudier la limite $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ et dresser le tableau de variation de f.

2. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $f(x)=n$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que

$0\leq\alpha_n\prec\dfrac{\pi}{2}\prec\beta_n\leq\pi$

b. Construire sur le graphique α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 et β_3

Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de chacune des suites (α_n) et (β_n)

c. Déterminer les valeurs exactes de α_0 et α_1.

3. a. Montrer que la suite (α_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente vers un réel α.

b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\sin(\alpha_n)=\dfrac{n^2}{1+n^2}$. En déduire α et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$.

Feuille à rendre

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

№ :

Exercice 1 :

Question	Réponse
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Exercice 5 :