Lycée pilote Elkef
Mr : Nsib kais

Devoir de contrôle № 1
Mathématiques

$4^{ème}$ M_2
Durée : 2^h
Nov 2009

<u>Exercice 1</u> : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse fausse 0 point.

---

1. L'équation f(x) = 2 admet dans $\mathbb{R}$:

A aucune solution

B une seule solution

C deux solutions

D trois solutions

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f	1	↗	5	↘	5/2	↗	$+\infty$

---

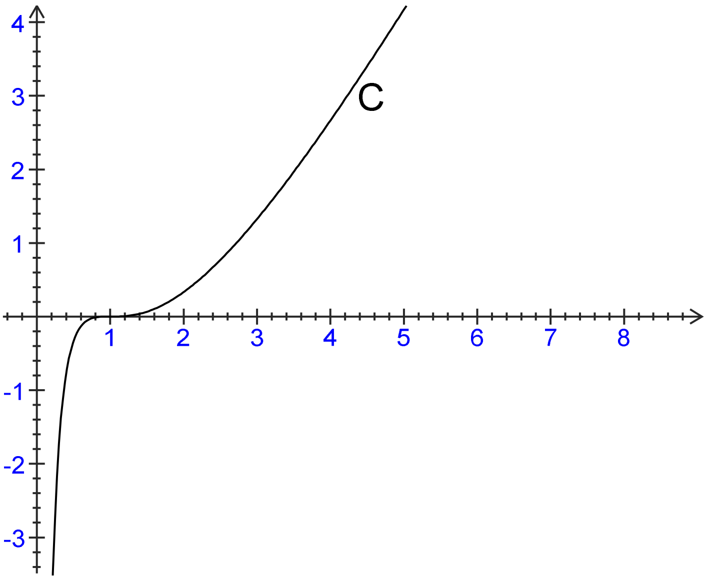
2. C est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$,
l'ensemble de définition de fof est :

A $\mathbb{R}$

B $\mathbb{R}^*$

C $\mathbb{R}_+^*$

D $]1,+\infty[$



---

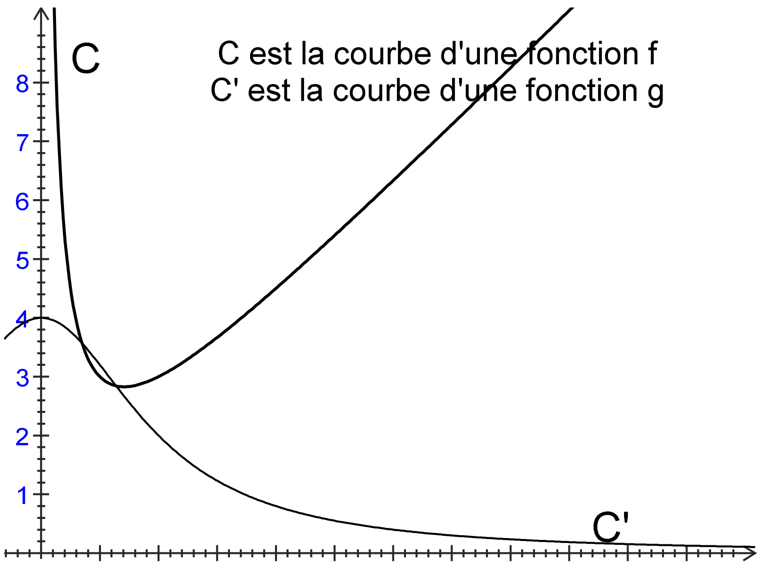
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} gof(x) =$

A 0

B $+\infty$

C $-\infty$

D 4



Pour les questions suivantes le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{I},\vec{J})$

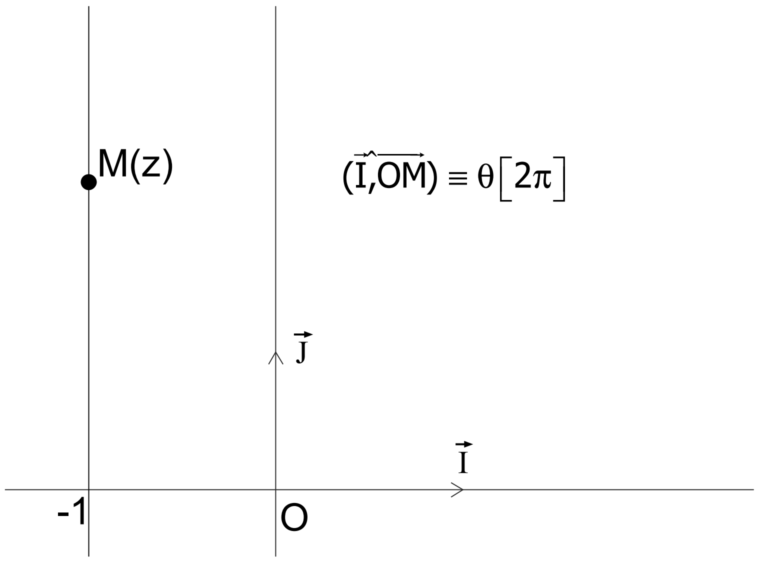
4. L'ensemble des M d'affixe z tels que $\dfrac{iz+1-2i}{z-3+i} \in \mathbb{R}^*$ est

- [A] un cercle privé d'un point
- [B] un cercle privé de deux points
- [C] une droite privé d'un point
- [D] une droite privé de deux points

---

5. La forme exponentielle de $\dfrac{1}{z}$ est :

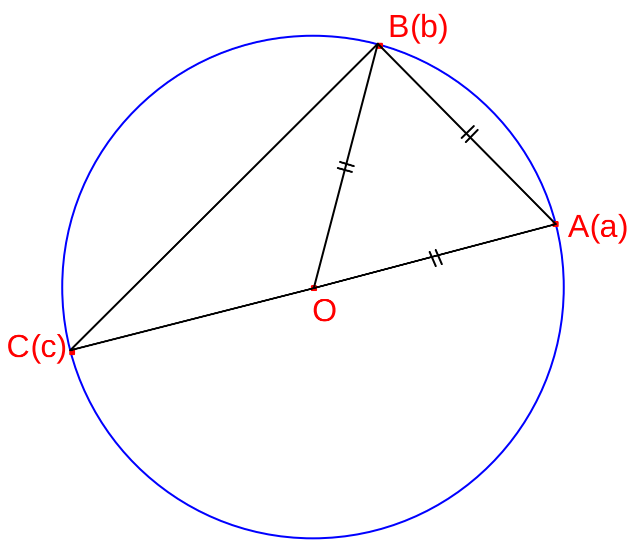
- [A] $-\cos(\theta)e^{i\theta}$
- [B] $-\cos(\theta)e^{i(-\theta)}$
- [C] $\sin(\theta)e^{i(-\theta)}$
- [D] $\cos(\theta)e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$



---

6. $\dfrac{b-c}{b-a} =$

- [A] i
- [B] 1
- [C] $i\sqrt{3}$
- [D] 2i



Exercice 2 : (5 points)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 + 3x - 16$
   a. Etudier les variations de g
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,7\,;1,8[$.
   c. Déterminer le signe de g(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+4}{4x^2+2}$.

   On désigne par Γ la courbe de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

   a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x.g(x)}{(4x^2+2)^2}$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   c. Tracer Γ.

Exercice 3 : (6 points)

Soit a un réel strictement supérieur à 1

On désigne par (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{a^2 + U_n^2}{2U_n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \succ a$.
2. Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - a \le \dfrac{1}{2}(U_n - a)$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - a \le a(\dfrac{1}{2})^n$.

   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
4. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n + a}{U_n - a}$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = V_n^2$.

   b. En déduire que tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = 3^{2^n}$.

   c. Exprimer alors U_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 4 : (6 points)

Pour tout $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - z + e^{i2\theta} - ie^{i\theta} = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ)
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$

   On désigne par A , M' et M'' les points d'affixes respectives 1 , $z' = 1 + ie^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$

   a. Ecrire z' et z'' sous forme trigonométrique.
   b. Montrer que le quadrilatère OM'A M'' est parallélogramme.
   c. Déterminer θ pour que OM'A M'' soit un losange.
3. Soit l'équation (E) : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$

   a. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1+i)$.
   b. Déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.