Lycée Pilote de Gabes	**Devoir de contrôle n ° : 1**	*Classe : 4M*
Le 03 / 11 / 2009		*Mathématiques*

Exercice n ° : 1 **(3 points)**

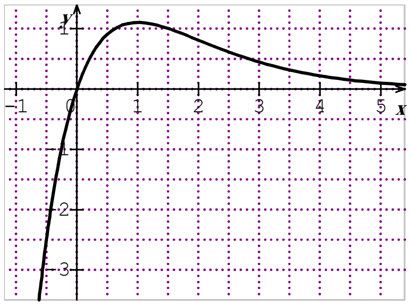
I°) (QCM) Pour chaque question choisir la seule réponse correcte

1°) Soit (U_n) une suite réelle définie sur IN* et vérifiant pour tout n de IN*,

$$1-\frac{1}{n} \leq U_n \leq 1-\frac{1}{n+1}$$ alors la suite (U_n) est :

a) croissante b) décroissante c) ni croissante ni décroissante

2°) Soit f une fonction continue sur]- 1 , +∞[et dont la courbe



est donnée ci- contre.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x}{x}\right) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.f\left(\frac{1-x}{2x}\right) = -\infty$

II°) (vrai ou faux)

1°) Si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes alors (U_n) est convergente.

2°) Si la suite (U_n) convergente vers 0 alors la suite (V_n) définie par : $V_n= (-1)^n U_n$ est divergente

Exercice n ° : 2 **(5 points)**

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. Montrer que : ∀x > 0, 0 < f(x) < x

2) Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a) Montrer que, pour tout n de IN, on a : $U_n > 0$
   b) Montrer que (U_n) est décroissante
   c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

3) Soit (V_n) la suite réelle définie par : $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$

   a) Montrer que ∀n ∈ IN*, $V_{n+1} \geq \sqrt{2}.V_n$

   b) En déduire que ∀n ∈ IN*, $V_n \geq \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice n ° : 3 **(5 points)**

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1°)a) Montrer que pour tout x > 0, $|f(x)| \le x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0

c) f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°)a) Montrer que f est continue sur] 0 , +∞[.

b) Montrer que l'équation : $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution dans [1 , 2]

3°) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pi$, interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice n° : 4 **(7 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère un triangle ABC et on désigne par a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

I°)1°) Montrer que :

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC **si et seulement si** $a.\bar{a}=b.\bar{b}=c.\bar{c}$

Dans la suite O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2°) a) Soit $\omega=\bar{b}.c-b.\bar{c}$. Montrer que ω est imaginaire pur.

b) Vérifier l'égalité $(b + c)(\bar{b}-\bar{c}) = \omega$. En déduire que: $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{\omega}{|b-c|^2}$ et que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3°) Soit H le point d'affixe (a + b + c).

a) Exprimer en fonction de a, b et c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Prouver que si b + c ≠ 0 alors $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}})=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Que peut –on dire du triangle ABC dans le cas où b + c = 0 ?

c) En admettant de plus que: $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, déterminer ce que représente le point H pour le triangle ABC.

II°) Soit, l'équation dans C, $(E_\theta): z^2 + 2i\left(1 - e^{i\theta}\right)z + 4e^{i\theta} = 0$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1°)a) Résoudre dans C l'équation (E_θ) . On notera z_0 et z_1 les solutions de cette équation.

b) Soit $Z = z_0 + z_1$. Vérifier que $Z = 2i\left(-1 + e^{i\theta}\right)$ puis déterminer la forme exponentielle de Z.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2°) On prend a = - 2i, b = $\sqrt{3} - i$ et c = $2i.e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$.
b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
c) Déterminer l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC.