Lycée Pilote ARIANA	Contrôle 1	4ème Maths
28 – 10 – 2009	MATHS	2 heures

Exercice 1 (3 points)
Répondre par Vrai ou Faux (aucune justification n'est demandée).

1°) Soit L'équation (E) d'inconnue z, définie par $z^3 = \overline{z}$

a) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (E)
b) Si α est solution non nulle de (E) alors $|\alpha| = 1$

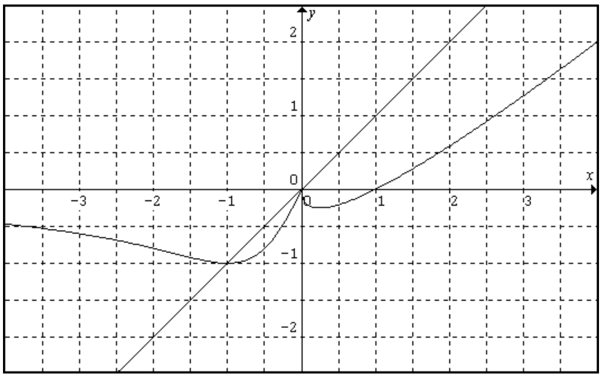
c) Si $|\alpha| = 1$ alors α est solution de (E)

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b telles que

$$\frac{a}{b} = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

a) O, A et B ne sont pas alignés
b) OAB est un triangle rectangle en O
c) OAB est un triangle équilatéral

Exercice 2 (5 points)
La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR. C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation y = 0, C_f admet en + ∞ une branche infinie de direction la droite y = x



1°) Donner chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2°) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin[f(x)]}{\sqrt{f(x)}}$

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
b) Montrer que C_g admet au moins trois asymptotes.
c) Déterminer l'image par g de l'intervalle [–1, 0[

Exercice 3 (6 points)

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

1° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

2° a) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$

b) En déduire que $u_n \geq 2\sqrt{n}$

c)Déterminer alors la limite de la suite u.

3° Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq 4 + \dfrac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite v.

4° a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

5° Soit s la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$

a) Montrer que $s_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$.

b) Calculer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n^2}{n}\right)$

Exercice 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A, M et N les points d'affixes respectives – 1, z et z'.

où z est un nombre complexe différent de –1 et $z' = \dfrac{z^2}{z+1}$.

1°) a) Montrer que z' est réel si et seulement si $z = \bar{z}$ ou $z\bar{z} = -(z + \bar{z})$

b) En déduire l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel.

2°) Soit z un complexe non nul vérifiant $z\bar{z} = -(z + \bar{z})$ et soit θ un argument de z, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Montrer que $|z| = -2\cos\theta$.

b) En déduire que $z' = -4\cos^2\theta$

c) Montrer que si M varie sur le cercle C de centre A et de rayon 1, alors N varie sur un segment que l'on précisera.

3°) On suppose que M est distinct de O.

Montrer que si le triangle OMA est rectangle en M, alors le triangle OMN est rectangle en O