Année 2008_2009
Lycée Bouhajla

Devoir de contrôle N° 1
Mathématiques
Durée 2h

Prof : Shili. A
Niveau : $4^{\text{ème}}$ math

<u>Exercice N°1</u> (3pts) **(QCM)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Recopier le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée

1. Soit ABCD un carré de sens direct .si $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\Delta} o S_{(AD)}$ alors :

-a) $\Delta = (BC)$ -b) $\Delta = \text{med}\,[AB]$ -c) $\Delta = (AC)$

2. Soient $R_{(I,\theta)}$ la rotation de centre I et d'angle θ et S_{Δ} la symétrie orthogonale d'axe Δ alors $\left(R_{(I,\theta)} o S_{\Delta}\right)^{-1} =$

-a) $S_{\Delta} o R_{(I,-\theta)}$ -b) $R_{(I,-\theta)} o S_{\Delta}$ -c) $S_{\Delta} o R_{(I,\theta)}$

3. Soit n un entier relatif, $(1+i)^n$ est imaginaire pur si et seulement si :

-a) $n = 2+4k$, $k \in \mathbb{Z}$ -b) $n = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ -c) $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

4. Soient $z \in \mathbb{C}$; F et H deux points d'affixe respectives z et z + i et O l'origine du repère orthonormé direct alors on a :

-a) OF = OH -b) $OF \perp OH$ -c) le vecteur $\overrightarrow{FH}$ a une direction fixe

<u>Exercice N°2</u> (6pts)

(les figures N°1 et N°2 se trouvent à la page 3)

La figure N°1 est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-1;+\infty[$

la droite D : $y = \dfrac{x}{2}$ est une asymptote de Cf au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation : x = - 1 est une asymptote de Cf

La figure N°2 est la représentation graphique de la fonction f 'définie sur $]-1;+\infty[$ (f ' est la fonction dérivé de f)

La droite d'équation : $y = \dfrac{1}{2}$ est une asymptote de Cf ' au voisinage de $+\infty$

1. a. Déterminer : $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Vérifier que l'équation : f (x) = x admet une seule solution $x_0 \in \left]1;2\right[$

2. On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a. Déterminer U_1 , Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$
   b. Vérifier que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - x_0| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)|U_n - x_0|$
   d. Montrer alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice N°3 (6pts)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A le point d'affixe 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2+i)\,m\,z + 2\,m^2\,i = 0$ où m est un paramètre complexe non nul
2. on désigne par les points M (m), M_1 (2m) et M_2 (i m)
   a. Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O
   b. Soit B et C les point d'affixe respectives $\frac{1}{2}$ et (- i)
   Montrer que si M est distinct B et C on a : $\left(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right)\ [2\pi]$
   c. Déterminer alors l'ensemble des points M pour que les points A, M_1 et M_2 soient alignées
3. On pose $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, Soit N le point d'affixe (i m – 1)
   a. Montrer que le quadrilatère OAM_2Nest un parallélogramme
   b. Ecrire (i m – 1) sous sa forme exponentielle, En déduire la valeur de θ pour que OAM_2N soit un losange
   c. Déterminer l'ensemble des points N quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice N°4 (5pts)

Soit la fonction f_n définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x^n$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$

1. a. Etudier les variations de f_n sur $]1 ; +\infty[$
   b. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]1 ; +\infty[$ une seule solution α_n, vérifier que $\alpha_n \in]1 ; 2[$
2. a. Vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$, En déduire que la suite (α_n) est décroissante
   b. En déduire que (α_n) est convergente, on note ℓ sa limite
   c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\ell \leq \alpha_n$, Montrer alors que $\ell = 1$

Figure N° 1

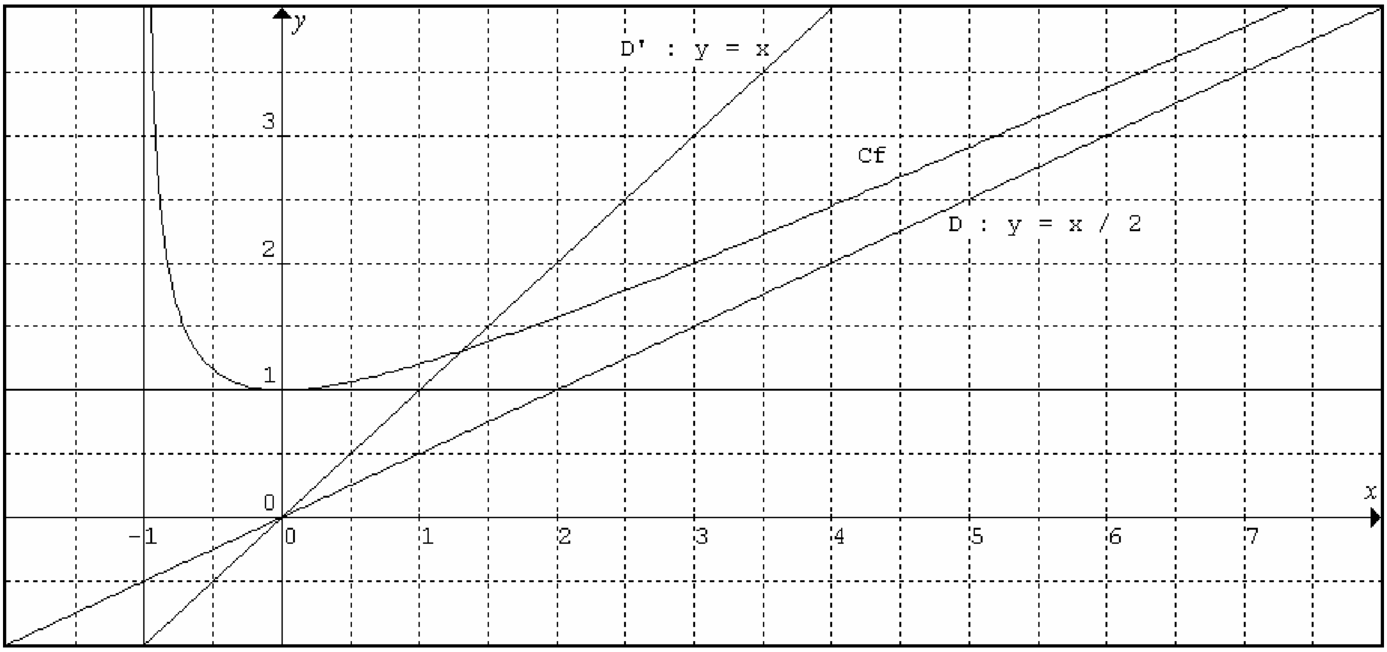

Figure N° 2