	LYCEE PILOTE DE SOUSSE	Devoir de contrôle N°1	CLASSE : 4Math
	LE 31 / 10 / 2009	MATHEMATIQUES	DUREE : 2 heures

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes cocher la réponse exacte

1/ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

☐ est égale à 0 ☐ est égale à π ☐ n'existe pas

2/ $\lim\limits_{x\to +\infty} \tan\left(\dfrac{\pi x^2}{2x^2+1}\right)$

☐ est égale à 0 ☐ est égale à $+\infty$ ☐ est égale à $-\infty$

3/ la suite U de terme général $U_n = \dfrac{n\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

☐ converge vers 1 ☐ converge vers 0 ☐ n'a pas de limite

4/ L'équation : $3x - 4x^3 = \dfrac{1}{2}$ admet dans l'intervalle $[0,1]$

☐ aucune solution ☐ une seule solution ☐ deux solutions

Exercice 2

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}U_n^2 + 2}$; $n \in \mathbb{N}$

1/ Déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite U est constante.

Dans toute la suite de l'exercice on prend $U_0 = 4$

2/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n > 2$

b- Montrer que la suite U est décroissante.

3/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - 2 \le \dfrac{3}{4}(U_n - 2)$

b- En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n - 2 \le 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

c- Prouver que la suite U converge vers un réel que l'on précisera.

4/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = \dfrac{\sqrt{2^n+3}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}$. Retrouver ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

5/ Soit n un entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kU_k$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le S_n - n(n+1) \le 6n\left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

Exercice 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et m est un paramètre complexe.

1/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_m) $\quad iz^2+(1-i)(m+1+i)z-m(1+m)(1+i)=0$

b- On suppose que $m=e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Mettre sous forme exponentielle chacune des solutions de (E_m).

2/ On considère les points A, B, M, M' et M'' d'affixes respectives :

$$z_A=-1,\ z_B=-i,\ z_M=m,\ z_{M'}=m+i \text{ et } z_{M''}=i(m+1)$$

a- Déterminer l'ensemble des points M pour que $OM'M''$ soit un triangle rectangle en O.

b- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre A et rayon 2.

c- Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque M décrit le segment [AB].

Exercice 4

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, M et M' d'affixes respectives : 1 , z et z^3.

1/ a- Montrer que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $(1+z+z^2)$ est un nombre réel.

b- Déterminer l'ensemble $(E)=\left\{M(z)\in P \ / \ A, M \text{ et } M' \text{sont alignés}\right\}$

c- On prend $z=-\dfrac{1}{2}+iy$ avec $y\in\mathbb{R}^*$.

Construire le point M' d'affixe z^3.

2/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4=1$.

b- Soit N le point d'affixe $z_N=-(z^2+2)$

Déterminer les nombres complexes z pour que le quadrilatère $AMNM'$ soit un parallélogramme.