	LYCEE PILOTE DE SOUSSE	Devoir de contrôle N°1	CLASSE : 4Math$_1$
	LE 01 / 11 / 2008	MATHEMATIQUES	DUREE : 2 heures

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes cocher la réponse exacte

1/ f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ admet au voisinage de $+\infty$:

☐ une branche infinie parabolique de direction la droite $\mathcal{D}(O,\vec{i})$

☐ une branche infinie parabolique de direction la droite $\mathcal{D}(O,\vec{j})$

☐ une asymptote horizontale

2/ la suite U de terme général $U_n=\left(\frac{\sin n}{n}\right)^n$, $n\geq 1$

☐ converge vers 0

☐ converge vers 1

☐ diverge

3/ Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

l' ensemble $E=\{M(z)\in P/\ |3+iz|=|3-iz|\}$ est :

☐ le plan P

☐ un singleton

☐ une droite

4/ P est le plan complexe rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et m est un paramètre complexe non réel

les solutions z_1 et z_2, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $mz^2+(2+i)z-m=0$ vérifient :

☐ $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\pi+\arg(m)\ (2\pi)$

☐ $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\pi\ (2\pi)$

☐ $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv 0\ (2\pi)$

EXERCICE 2 (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , 2 et $1-i$.

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) : $iz^2-2(i-\cos\theta)z-2\cos\theta=0$

1/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b- Mettre chacune des solutions de (E) sous forme exponentielle.

2/ Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma=\left\{M(z)\in P/\ \arg\left(\frac{z-2}{z}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)\right\}$

3/ Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1=1+ie^{i\theta}$ et $z_2=1+ie^{-i\theta}$

a- Montrer que lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, chacun des points M_1 et M_2 décrit l'ensemble Γ.

b- Lorsque $M_1\neq M_2$, on désigne par G le centre de gravité du triangle AM_1M_2 .

Déterminer l'ensemble points G lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

c- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE 3 (4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

1/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$ (I)

b- Placer dans le P les points images A, B, C, D et E des solutions de l'équation (I).

2/ On considère le polynôme $Q(Z) = (1-Z)^4 + (1-Z)^3 + (1-Z)^2 + (1-Z) + 1$

a- Vérifier que : $Z \cdot Q(Z) = 1 - (1-Z)^5$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(Z) = 0$ (II)

c- En déduire une factorisation de $Q(Z)$ en un produit de quatre binômes.

3/ Montrer que $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE = 5$

EXERCICE 4 (7 points)

On considère les suites U et V définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 0$, $V_0 = 8$, $U_{n+1} = \sqrt{12 - V_n}$ et $V_{n+1} = \sqrt{12 - U_n}$; $n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n < 3$ et $3 < V_n \leq 8$

2/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}\left(V_n - U_n\right)$

b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $V_n - U_n \leq 8\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3/ a- Montrer que les suites U et V sont adjacentes.

b- Calculer la valeur de leur limite commune L.

4/ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, U_k V_K$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\left|S_n - 9\right| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \left|U_k V_K - 9\right|$

b- Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\left|U_k V_k - 9\right| \leq 3\left(V_k - U_k\right)$

c- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\left|S_n - 9\right| \leq 24\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Etudier alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$