	LYCEE PILOTE DE SOUSSE *LE 12 / 11 / 2007*	*Devoir de contrôle N°1* *MATHEMATIQUES*	*CLASSE : 4Math$_1$* *DUREE : 2 heures*

Exercice 1

Soit f un fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

Pour tout couple de réels (x,y) : $|f(x)-f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$

1/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ On se propose de montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique.

a- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au plus une solution.

b- On suppose que $f(0)>0$

i- Montrer que pour tout $x>0$, $f(0)-\frac{3}{2}x \le f(x)-x \le f(0)-\frac{1}{2}x$

ii- En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution.

c- Etudier le cas $f(0)<0$, puis conclure.

Exercice 2

Soit la suite réelle (U_n) définie par : $U_0=\frac{1}{4}$ et $U_{n+1}=1-\sqrt{U_n}$; $n\in\mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{4}\le U_n \le \frac{1}{2}$

2/ On considère les suites (V_n) et (W_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a- Montrer que la suite (V_n) est croissante et que la suite (W_n) est décroissante.

b- En déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont convergentes.

3/ On pose $L_1=\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $L_2=\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$

a- Montrer que : $L_1-L_2=\sqrt{L_1}-\sqrt{L_2}$

b- En déduire que la suite U est convergente vers un réel L que l'on déterminera.

Exercice 3

1/ Soit le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^3 et $1+j+j^2$

2/ Déterminer les nombres complexes z qui vérifient : $|z|=|z+1|=1$.

3/ n et p étant deux entiers naturels non nuls, on considère les équations (E) : $z^n=1$ et (E') : $(z+1)^p=1$

a- Montrer que si z_0 est une solution commune de (E) et (E') alors $z_0=j$ ou $z_0=j^2$

b- Déterminer les couples (n,p) pour lesquels (E) et (E') admettent deux solutions communes.

Exercice 4

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et i et par (C) le cercle de centre O et rayon 1.

Soit l'application F qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z-i}{\bar{z}}$

1/ Montrer que F n'admet aucun point invariant.

2/ Déterminer l'ensemble des antécédents par F du point A.

3/ a- Montrer que pour tout point M de $P\setminus\{O,B\}$, on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)\ (2\pi)$

b- En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les points O, M et M' sont alignés.

4/ a- Montrer que pour tout point M de $P\setminus\{O\}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

b- En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB).

Effectuer la construction en prenant $z_M=1+i(1+\sqrt{3})$.

5/ a- Montrer que si $z'=\frac{z-i}{\bar{z}}$ alors $z(1-z'\overline{z'})=i(1-z')$

b- En déduire que tout point de P n'appartenant pas au cercle (C) admet un seul antécédent par F.

c- Déterminer l'image par F de la droite $D(B,\vec{u})$.