

	<b><i>Devoir de contrôle n° 2</i></b> Mathématiques	Classe : 4 <sup>ème</sup> Sc exp
Date : 05 /02 / 2010	<a href="http://afimath.jimdo.com/">http://afimath.jimdo.com/</a>	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a/ Vérifier que  $f$  est continue en 1.  
b/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a/ Etudier les variations de  $f$ .  
b/ Montrer que la droite  $D : y = x$  est une asymptote à  $\mathcal{C}$ .  
c/ Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $D$  sur  $[1, +\infty[$ .  
d/ Tracer  $D$  et  $\mathcal{C}$ .
- 3) a/ Montrer que  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .  
b/ On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ .  
Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 0.  
c/ On désigne par  $\mathcal{C}'$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Tracer  $\mathcal{C}'$ .  
d/ Montrer que, pour tout  $x \in ]-\infty, 0]$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$ .

- 1) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 2) a/ Montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$ .  
b/ On désigne par  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ .  
Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $[0, \frac{1}{2}[$ .  
c/ Calculer  $f^{-1}(\frac{1}{4})$  et  $(f^{-1})'(\frac{1}{4})$ .

d/ Montrer que, pour tout  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $(f^{-1})'(x) = \frac{-4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$ .

Exercice n°3 : (4 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(-1, 1, 2)$  et  $D(3, 1, 1)$ .

- 1) a/ Calculer les composantes du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .  
 b/ Déduire l'aire du triangle  $ABC$ .  
 c/ Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont non coplanaires.
- 2) a/ On note  $V$  le volume du tétraèdre  $ABCD$ . Montrer que :  $V = \frac{1}{2}$ .  
 b/ Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$ . Calculer  $DH$ .
- 3) a/ Calculer la distance du point  $D$  à la droite  $(AC)$ .  
 b/ On note  $H'$  le projeté orthogonal de  $D$  sur la droite  $(AC)$ , montrer que le triangle  $DHH'$  est rectangle et en déduire  $HH'$ .

Exercice n°4 : (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-3, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$  et  $C(-3, 3, -3)$ .

- 1) a/ Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$ .  
 b/ Montrer qu'une équation cartésienne de  $P$  est :  $x - y - z + 3 = 0$ .  
 c/ Soit le point  $H(-2, 2, -1)$ , montrer que  $H$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ .
- 2) Soit l'ensemble  $S$  d'équation :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 8z - 15 = 0$ .  
 a/ Montrer que  $S$  est une sphère dont-on précisera le centre  $I$  et la rayon  $R$ .  
 b/ Vérifier que  $A, B$  et  $C$  appartiennent à  $S$ .  
 c/ Vérifier que  $(IH)$  est l'axe de  $\mathcal{C}$ .  
 d/ Déterminer l'intersection de  $S$  et  $P$ .
- 3) Soit le point  $D(1, 0, 0)$ .  
 a/ Vérifier que  $D$  est à l'intérieur de  $S$ , et que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont non coplanaires.  
 b/ Soit  $Q$  le plan d'équation :  $x + 1 = 0$ .  
 Montrer que  $Q$  est le plan médiateur du segment  $[AD]$ .  
 c/ Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R'$  de la sphère  $S'$  circonscrite au tétraèdre  $ABCD$ .

*Bonne chance*

<http://afimath.jimdo.com/>