Devoir de synthèse n°1	**Classe:** $4^{\text{ième}}$Sc2
Durée de l'épreuve : 2H	**Prof:** AFIF BEN ISMAIL

Exercice n°1

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} & si\ x \in \left]-\infty, 0\right[\\ f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & si\ \ x \in \left[0, +\infty\right[\end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3°) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a : $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $\left]0,+\infty\right[$, une solution unique $\alpha \in \left]1,5;1,6\right[$

Exercice n°2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_0 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$

1°) a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer w_n en fonction de n

2°) Montrer que pour tout entier naturel n ; $u_n \le v_n$

3°) a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante

a) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite L

4°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 7u_n + 12v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante

b) En déduire alors la valeur de L

Exercice n°3 (   )

Soit m un réel non nul

1°)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$

2°) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2).$$

a) Vérifier que $f(i)=0$; en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i, $i+m$ et $i-m$

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle OM'M" est isocèle.

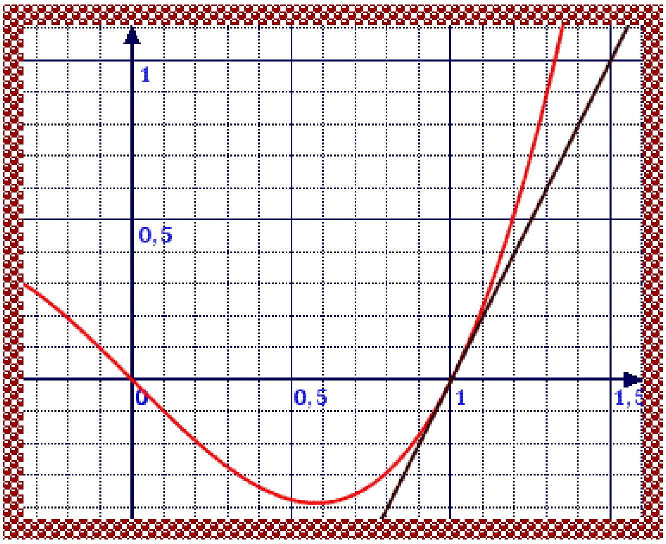
c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle OM'M" soit équilatéral.

Exercice n°4

Pour chaque question, une seule des propositions données est correcte
L'élève doit cocher une seule des réponses données pour chaque question
***1 pt** pour une bonne réponse , **- 0,25 pt** pour une réponse fausse.*
***0 pt** dans le cas d'une réponse ambiguë ou absence de réponse*
Les notes pour cet exercice vont de 0 à 4.

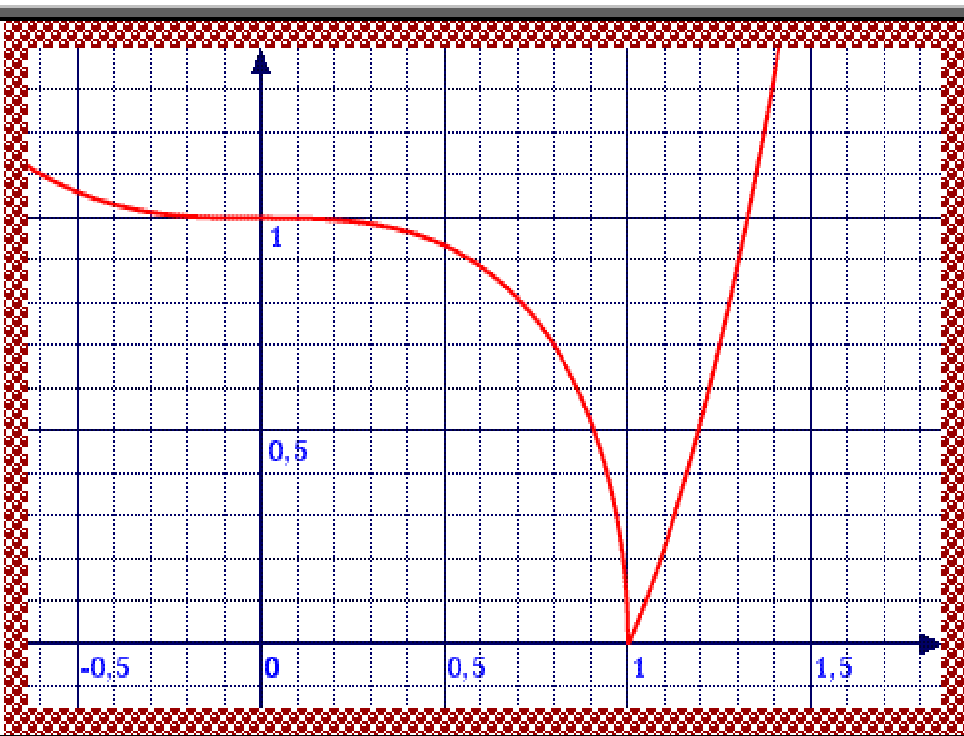
1°)
La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f

Déterminer $f'(1)$



☐ $f'(1)=0$	☐ $f'(1)=-2$	☐ $f'(1)=2$

2°)

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f	

☐ f dérivable en 1	☐ f dérivable à gauche en 1 et n'est pas dérivable à droite en 1	☐ f dérivable à droite en 1 et n'est pas érivable à gauche en 1

3°)Si (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n non nul on a :

$|u_n + 1| \leq sin\left(\frac{1}{n}\right)$, alors :

☐ (u_n) n'est pas convergente	☐ (u_n) converge vers 1	☐ (u_n) converge vers 0

4°)Les racines quatrième de 16 sont de la forme :

☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec k $\in \{0,1,2,3\}$	☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{4}}$ avec k $\in \{0,1,2,3\}$	☐ $z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec k $\in \{0,1,2,3\}$