Devoir De Synthèse N°1

Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

• *Pour Chacune des questions suivantes une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La fonction $x \mapsto \tan(\sin x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

a) $x \mapsto 1+\tan^2(\sin x)$

b) $x \mapsto \sin x\left(1+\tan^2(\cos x)\right)$

c) $x \mapsto 1+\tan^2(\cos x)$

d) $x \mapsto \cos x\left(1+\tan^2(\sin x)\right)$

2) Soit f une fonction dérivable sur $[-2,3]$ telle que $4 \le f'(x) \le 6$ alors :

a) $20 \le f(3)-f(-2) \le 30$

b) $-8 \le f(3)-f(-2) \le 18$

c) $4 \le f(3)-f(-2) \le 6$

d) $-2 \le f(3)-f(-2) \le 3$

3) L'équation $z^2-(2+i)z+2i=0$ admet pour solutions dans $\mathbb{C}$

a) $\{1,\ i\}$

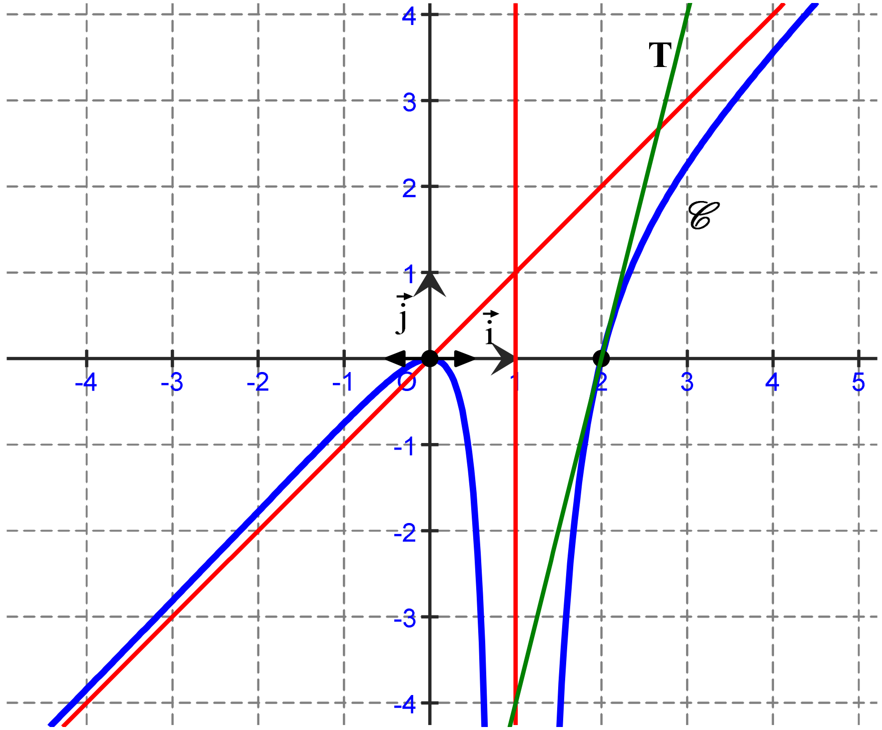
b) $\{-2,\ i\}$

c) $\{2,\ i\}$

d) $\{-1,-2i\}$

Exercice 2 (4 points)

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Les droites d'équations $x=1$ et $y=x$ étant des asymptotes à $(\mathscr{C})$
La droite T est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.



En utilisant le graphique, Déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x)$

3) $f'(0)$ et $f'(2)$.

4) Le tableau de variation de f.

5) Le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 3 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $[3,+\infty[$ par : $f(x)=x+\sqrt{x^2-9}$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que pour $x\in\,]3,+\infty[$, $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

c) Montrer que f est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]3,+\infty[$

b) Calculer $f(5)$ et $(f^{-1})'(9)$.

c) Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 9.

3) Montrer que la droite $\Delta : y=2x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x\in[3,+\infty[$.

Exercice 4 (6 points)

1) a) Ecrire $(3-i)^2$ sous la forme algébrique.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(7+7i)z-2+26i=0$

2) Soit $f(z)=z^3-(6+7i)z^2+(-9+19i)z-2+26i$

a) Vérifier que $f(-1)=0$

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que

$f(z)=(z+1)(z^2+bz+c)$

c) Résoudre alors l'équation $f(z)=0$

3) Soient dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

les points $A(-1)$, $B(3i)$, $C(2+4i)$ et $D(5+3i)$.

Montrer que $AB=CD$ et $(BC)//(AD)$