Lycée pilote Elkef **Devoir de synthèse №1** **$4^{ème}$ Sc**
Mathématiques
Durée : 2^h

Exercice 1 : (9 points)

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
   b. Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.
2. Pour tout réel θ de l'intervalle $]0,\pi[$, on considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$.
   a. Vérifier que $e^{i2\theta} - 1 = 2i\sin\theta.e^{i\theta}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par M_0 , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_0 = 2$, $z_1 = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + e^{i\theta}$.
   a. Montrer que les points M_0 , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.
   b. Montrer que $OM_1 M_0M_2$ est un parallélogramme.
   c. Déterminer θ pour que $OM_1M_0M_2$ soit un carré.
4. Montrer que les points M_1 et M_2 varient sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
5. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Exercice 1 : (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},+\infty\right[$ par : $\begin{cases} (x) = \dfrac{1}{1+tg(x)} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{4},0\right] \\ f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. a. Vérifier que f est continue en 0.
   b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.
4. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$.
   a. Montrer que h une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $[1,+\infty[$.
   b. Montrer h^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout $x \in [1,+\infty[$ $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$.
5. Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = h^{-1}(\dfrac{x-1}{x}) & \text{si } x \prec 0 \\ \varphi(0) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$
   a. Montrer que φ est continue à gauche en 0.
   b. Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \prec 0$.