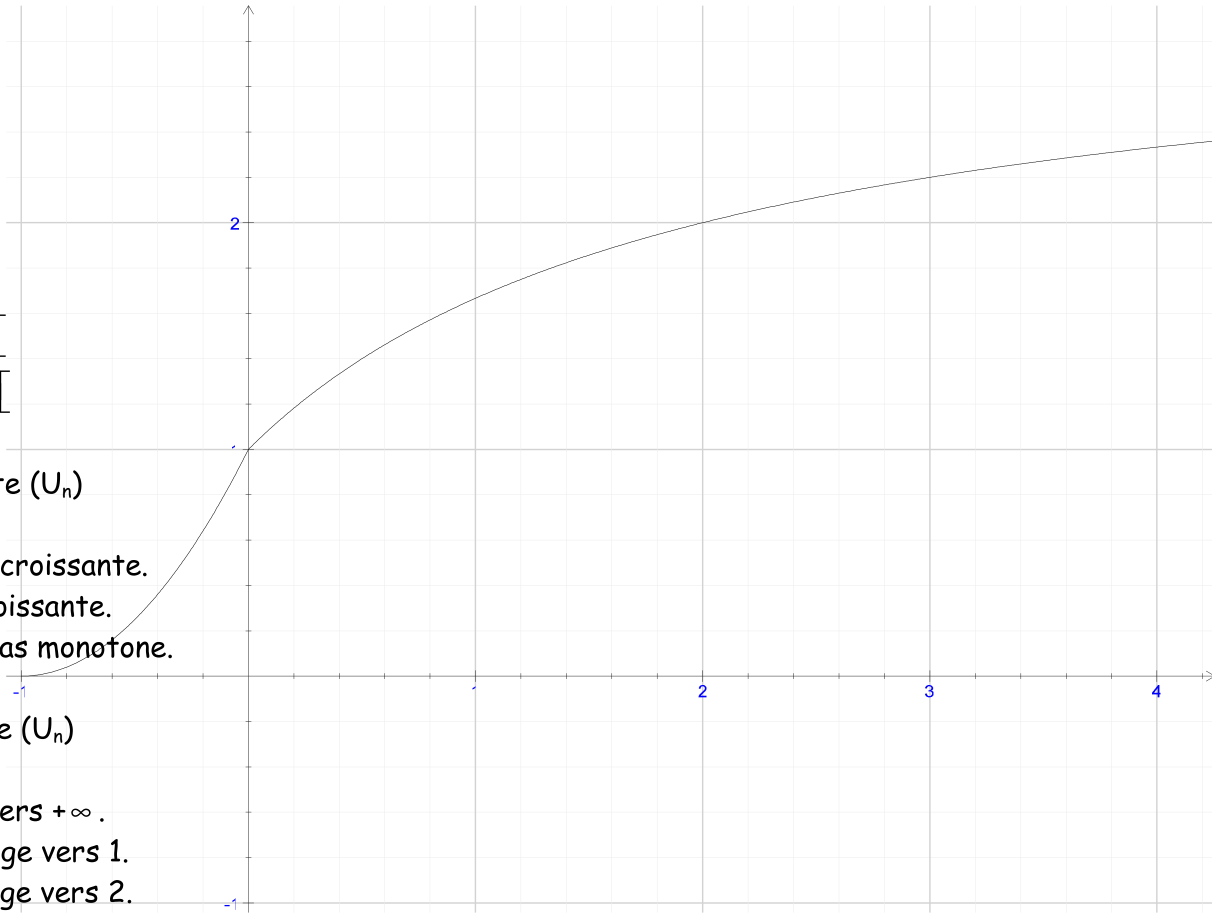
LYCEE PILOTE ELKEF — DEVOIR DE SYNTHESE №1 — $4^{ème}$SC

MATHEMATIQUES — 2010-2011

EXERCICE 1 :(3 points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\left[-1,+\infty\right[$ .Soit (U_n) la suite définie par : U_0= 0 et pour tout n$\in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

<u>Utiliser le graphique pour choisir la réponse exacte.</u>



1) U_1 =

A. -1.
B. 1.
C. 0.

2) $U_2 \in$

A. $\left]0,1\right[$
B. $\left]1,1.6\right[$
C. $\left]1.6,2\right[$

3) La suite (U_n)

A. est décroissante.
B. est croissante.
C. n'est pas monotone.

4) La suite (U_n)

A. tend vers $+\infty$.
B. converge vers 1.
C. converge vers 2.

EXERCICE 2 :(3 points)

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2}-x$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : f(x) = $(\sqrt{1+x^2}-x)\sin(x)$.

a- Montrer que pour tout x$\in \mathbb{R}_+^*$ on a : f(x) = $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

b- Montrer que pour tout x$\in \mathbb{R}_+^*$ on a : $|f(x)| \le \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 3 :(4.5 points)

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $V_0 = \frac{7}{2}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{5U_n + V_n}{6}, V_{n+1} = \frac{U_n + 5V_n}{6}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = V_n - U_n$.

a- Montrer que (X_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b- Exprimer (X_n) en fonction de n, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \le V_n$.

2) a- Etudier la monotonie de chacune des suites (U_n) et (V_n).

b- Prouver alors que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $Y_n = V_n + U_n$.

a- Montrer que (Y_n) est suite constante.

b- Déterminer alors L.

EXERCICE 4 :(3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (i - 5)z^2 + 6(1 - i)z + 8(i - 1) = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle que l'on précisera.

2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

3) Montrer que les images des solutions de (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

EXERCICE 5 :(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout réel θ de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) On désigne par désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives i , $z' = i + e^{i\theta}$ et $z'' = i + e^{-i\theta}$.

a- Montrer que les points M' et M'' varient sur un même cercle que l'on précisera lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

b- On note I le milieu du segment [M'M''].

Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

3) a- Montrer que pour tout réel x on a : $i + e^{ix} = 2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

b- Mettre alors z' et z'' sous forme exponentielle.

4) a- Montrer que AM'M'' est un triangle isocèle en A.

b- Déterminer θ pour que le triangle AM'M'' soit équilatéral.