Durée **02** *heures*

N.B : La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°01 :

Soit $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

Cocher la réponse juste :

- [ ] *La forme algébrique de* z *est* $z = \sqrt{3} - i$
- [ ] $|z| = 2$
- [ ] $Arg(z) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$
- [ ] *Le point* $M(z)$ *est l'un des points d'intersection du cercle de centre* O *, du rayon* 2 *et de la droite d'équation* $y = \frac{1}{2}$
- [ ] $z^6 = -64$

Exercice n°02 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *(unité graphique* $4\,cm$ *)*

On considère l'équation d'inconnue complexe z *:* $(E): z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta$; $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E).

On notera z_1 *la solution dont la partie imaginaire est positive et* z_2 *l'autre solution.*

2/ Calculer $z_1 + z_2$; $z_1 \times z_2$ puis $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ *en fonction de* θ.

3/ a) Calculer $S = z_1^2 + z_2^2$

b) Pour quelle valeur de θ *a-t-on* $S = 0$ *?*

4/ On note A *et* B *les points du plan complexe d'affixes respectives* z_1 *et* z_2

a) Placer A *et* B *sur une figure en faisant apparaître* θ *comme une mesure d'un angle orienté.*

b) Quelle est la nature du triangle OAB *?*

c) Déterminer θ *pour que* OAB *soit un triangle équilatéral.*

d) Exprimer en fonction de θ *l'aire du triangle* OAB.

Exercice n°03 :

Soit $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 + x^2}$

1/ Déterminer D_f *(le domaine de définition de* f *).*

2/a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x - 1}{1 + x^2} \leq f(x) \leq \frac{1 + x}{1 + x^2}$

b) En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

c) Interpréter graphiquement ces deux limites.

3/ Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ *admet une solution* $\alpha\in\left]-1,1\right[$

Exercice n°04 :

Soit g *la fonction définie sur* $\left[1,+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

On désigne par $\left(\xi_g\right)$ *la courbe représentative de* g *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ Etudier les variation de g *et tracer* $\left(\xi_g\right)$.

2/ Montrer que l'équation $g\left(x\right)=x$ *admet une solution unique* $\beta\in\left]1,2\right[$

3/ a) Montrer que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$, $\left|g'\left(x\right)\right|\le\frac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$, $\left|g\left(x\right)-\beta\right|\le\frac{1}{2}\left|x-\beta\right|$