L.S. Bir M'cherga 09-12-2009	Devoir de synthèse n°1 en mathématiques	M^{me} : Ben Soyah 4ème sc 2 Durée : 2h

Exercice 1 (7pts)

Le graphique ci-joint représenté dans un repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative d'une fonction f et D la droite d'équation y = x

1) Déterminer :

a- Le domaine de définition de f.

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

c- $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{f(x)+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{f(x)+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}$

d- $f(]-\infty, 3[)$, $f(]-\infty,-2])$, $f([1, 3[)$

2) Soit g la restriction de f sur [1, 3[

a- Montrer que g réalise une bijection de [1, 3[sur un intervalle J que l'on déterminera

b- Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

c- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$

d- Déterminer $(g^{-1})'(1)$

3) Soient la fonction $u(x)=\frac{x-1}{x+1}$ définie sur IR\{-1} et h(x) = uog(x)

Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 2 (6pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout réel $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on considère dans C l'équation :

$$E_\theta : z^3-(3+2i\sin 2\theta)z^2+(2+4i\sin 2\theta)z-2i\sin 2\theta=0$$

1) a- Vérifier que 1 est une solution de (E_θ)

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_0=1$, $z_1=e^{i2\theta}$ et $z_2=1-e^{-i2\theta}$

Déterminer l'ensemble décrit par les points B lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4) a- Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

b- Déterminer θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

5) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1+e^{i2\theta}$, on associe le point M' d'affixe

$$z'=\frac{z-1}{iz-i-ie^{2i\theta}}$$

a- Montrer que $|z'|=\frac{AM}{BM}$

b- En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice 3 (7pts)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Calculer f'(x) et montrer que f est strictement décroissante sur IR.

c- Dresser le tableau de variation de f.

2) a- Montrer que f réalise une bijection de IR sur]0,+00[

b- Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

II- Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ n\in IN \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout $n\in IN$, $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 2$

2) a- Montrer que la fonction f' est strictement croissante sur IR

b- En déduire que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{3}{4}$

3) a- Montrer que : $\forall n\in IN, |U_{n-1}-1|\leq\frac{3}{4}|U_1-1|$

b) En déduire que la suite U converge vers 1.