DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

AFIF BEN ISMAIL

CLASSE : 4ème Sciences Expérimentales 1

EPREUVE MATHEMATIQUES

Durée : 2h

Date 2010-2011

Exercice 1: (3 points)

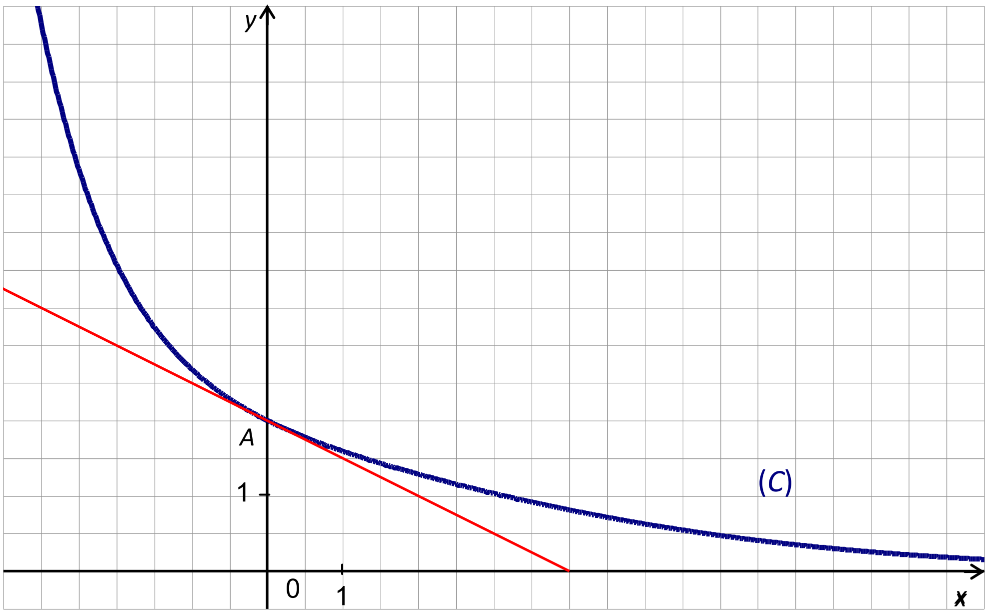
Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Si (u_n) est une suite décroissante et converge vers 0 alors les suites (u_n) et $(-u_n)$ sont adjacentes.
2. La courbe représentative dans un repère du plan de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ possède deux points d'inflexion.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

   Alors pour tout x de $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2 - x^2}}$.
4. Les racines cubiques de -1 sont : -1, $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f. On sait que :

- la courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point $A(0\,;2)$;
- la courbe (C) admet pour asymptote l'axe des abscisses ;
- la tangente en A à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.



5. f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
6. f^{-1} est dérivable en 0 et $\left(f^{-1}\right)'(0) = -2$.

<u>Exercice 2</u> : (6 points)

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(E) : z^2 + \left(1-\sqrt{3}+2i\right)z - \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0 .$$

1. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A, B et C les points d'affixes

respectives $z_A = -1-i$, $z_B = \sqrt{3}-i$ et $z_C = 1+\sqrt{3}$.

a) Placer, dans le plan complexe, les points A, B et C.

b) Montrer que le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du point Ω le centre de OABC.

d) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)$

<u>Exercice 3 :</u> (5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+6x$ et $g(x)=\frac{1}{6}\left(1-x^3\right)$.

1. a) Justifier que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Vérifier que $0<\alpha<1$.

2. a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle [0, 1], g(x) $\in[0,1]$. Puis vérifier que $g(\alpha)=\alpha$.

   b) Montrer que pour tout x de [0, 1], $\left|g'(x)\right|\leq\frac{1}{2}$.

3. On introduit la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g\left(u_n\right)$.

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 1$.

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$.

   c) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

<u>Exercice 4 :</u> (6 points)

Le tableau suivant est le tableau de variations d'une fonction f .

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner les équations des asymptotes de (C).
3. Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x) = 3 ?
4. Comparer, en justifiant, f(2) et f(3).
5. Ecrire une équation de la tangente à (C) au point A(0 ; -1).

Partie B

Dans cette partie, on admet que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+b}$.

1. En utilisant le tableau de variations de f, montrer que a = 1 et b = –1.
2. Résoudre l'équation f(x) = 3.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.