



**EXERCICE N°3 : (6 points)**

Soit (E) l'équation dans  $\mathbb{C}$  définie par (E) :  $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$  avec  $a$  désigne un nombre complexe **non nul**.

1/ a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E). On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E).

b) Montrer que  $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^*$

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on donne les quatre points A, B, M et N d'affixes respectives  $1, -1 + 2i, i + a$  et  $i - a$

a) Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

b) Lorsque  $M \notin (AB)$ , donner la nature du quadrilatère AMBN.

3/ On suppose que  $a = e^{i\theta} - 2i$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$

a) Montrer que M décrit un cercle fixe (C) que l'on précisera lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi]$

b) En déduire l'ensemble (C') des points N lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi]$ .

**EXERCICE N°4 : (6 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [-1, 1]$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $\xi_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Montrer que  $f$  est continue et dérivable en 0.

2/ Montrer que  $f$  est impaire.

3/a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a : 
$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{1}{x} \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right).$$

b) En déduire que  $f$  n'est pas dérivable ni à gauche en 1 ni à droite en  $-1$ .

Interpréter géométriquement le résultat

4/a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a : 
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})}$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

c) Construire  $\xi_f$  et sa tangente au point 0

5/ a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $I$ . Soit  $f^{-1}$  sa réciproque.

b) Construire la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère.

c) Montrer que pour tout  $x$  de  $I$  on a : 
$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$