

AFIF BEN ISMAIL	DEVOIR DE CONTROLE N°1	<i>Année Scolaire: 2009-2010</i>
		<i>Classe: 4^{ème} Sc3</i>
MATHEMATIQUES		<i>Durée: 2 heures</i>

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. a) Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$
- b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R}
- c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x
2. On considère la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f(\sin x)$
 - a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 - b) Vérifier que pour tout réel x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $g(x) = \operatorname{tg} x$
 - c) Montrer que g réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera
 - d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$

1. Montrer que pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-1-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet une seule solution α dans $[-1, +\infty[$ et
Vérifier que $\alpha \in]0, 1[$.

3. Soit la suite réelle U définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n) \end{cases}$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in]0, 1[$.
- b) Montrer que $\forall x \in]0, 1[\quad |f'(x)| \leq 2$.
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$
- d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$.

e) Dédurre que U converge vers une limite que l'on précisera

EXERCICE 3 :

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$

2. Soit $f(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

a) Calculer $f(-2\sqrt{2})$

b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v})

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+2i, 2-2i$ et $-2\sqrt{2}$

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en C inscrit dans un cercle de centre O dont on précisera le rayon

b) Calculer $\frac{z_A}{z_B}$, en déduire la nature du triangle OAB

c) Donner une mesure de l'angle (\vec{CB}, \vec{CA})

d) En déduire qu'une mesure de (\vec{AB}, \vec{AC}) est $\frac{3\pi}{8}$