AFIF BEN ISMAIL	**Devoir de contrôle n° 1** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp₁*
Date : 14 /10 / 2009	http://afimath.jimdo.com/	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (7 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$ et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

1) Soit $\theta \in]0\,,\pi[$. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
   (E_θ): $z^2 - \left(2 + e^{i\theta}\right)z + 1 + e^{i\theta} = 0$.
2) Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$.
   a/ Montrer que B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   b/ Montrer que : $z_B = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   c/ En déduire que : $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel. Interpréter géométriquement le résultat.
3) Dans la suite de l'exercice, on pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   a/ Donner la forme algébrique de z_B .
   b/ Construire les points B et E.

Exercice n°2 : (7 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{2+U_n} \end{cases}$ *pour tout* $n \in IN$.

1) **a/** Montrer que, pour tout $n \in IN$, *on a*: $1 \le U_n < 2$.
   b/ Montrer que la suite U est croissante.
   c/ En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
2) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$.
   a/ Montrer que V est une suite géométrique.
   b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
3) **a/** Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $|U_{n+1} - 2| \le \frac{2}{3}|U_n - 2|$.
   b/ En déduire que, $|U_n - 2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

http://afimath.jimdo.com/

c/ Retrouver la limite de U_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Exercice n°3 : *(6 pts)*

Soit f la fonction définie sur *IR* par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9}+5 & si\ x \leq 0 \\ \frac{sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & si\ x > 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   b/ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

   En déduire: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

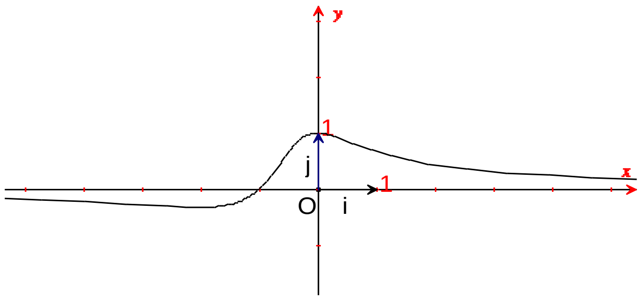
   a/ Calculer : $\lim_{x\to0^+} g(x)$.

   b/ En déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

   c/ La fonction f est-elle continue en 0 ?

3) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *h* continue sur *IR*
   Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} h(f(x))$, $\lim_{x\to-\infty} f(h(x))$ et $\lim_{x\to+\infty} h(f(x))$.



Bonne chance

http://afimath.jimdo.com/