Exercice n°1 ©

L'exercice comporte trois questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, une seule réponse est exacte.

		A	B	C	D
1	$Z = \dfrac{2+4i}{2-i}$	Le point *M* d'affixe *Z* est sur le cercle trigonométrique.	$Z = \overline{Z}$	*Z* est un imaginaire pur.	$Z = \dfrac{2}{3}i$
2	$Z = \sqrt{3} - i$	Un argument de *Z* est $-\dfrac{5\pi}{6}$.	Un argument de $\overline{Z}$ est $\dfrac{\pi}{6}$	Le point *M* d'affixe Z est sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{2}$	Le point *M* d'affixe Z^2 est sur l'axe des ordonnées.
3	*z* vérifie $\overline{z} + \lvert z \rvert = 6 + 2i$; l'écriture algébrique de *z* est :	$\dfrac{8}{3} - 2i$	$-\dfrac{8}{3} - 2i$	$\dfrac{8}{3} + 2i$	$-\dfrac{8}{3} + 2i$

Exercice n°2 ©

Dans chacun des cas suivants, répondre par VRAI ou FAUX. Aucune justification n'est demandée.

1. Le nombre complexe $(1+i)^{10}$ est imaginaire pur.

2. Le nombre complexe $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ est de module 1 et l'un de ses arguments est $\dfrac{7\pi}{3}$.

3. *A* est le point d'affixe $-1+2i$ dans un repère orthonormé. L'ensemble des points *M* d'affixe *z* vérifiant $(z+1-2i)(\overline{z}+1+2i) = 4$ est le cercle de centre *A* et de rayon 4.

Exercice n°3 ©

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Q1	Pour tout *n* entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre *z* est égale à :	$\frac{z+\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2i}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
Q3	Soit *z* un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (*x* et *y* réels). Si *z* est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐Faux ☐ Vrai
Q4	*A*, *B* et *C* sont des points d'affixes respectives *a*, *b* et *c* telles que $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	☐Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐Faux ☐ Vrai

Correction ex1

1. Le plus simple est de simplifier *Z* : $Z=\frac{2+4i}{2-i}=\frac{(2+4i)(2+i)}{4+1}=2i$. Donc réponse **C.**

2. Rien qu'en faisant la figure on voit que **B** est juste (arg(Z)=− π/6). On peut voir les autres réponses : le module de *Z* est 2, **C** n'est pas bon ; pour **D** : $z^2=3-1+2i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$ donc faux.

3. Comme $|z|$ est un réel, il faut que $\bar{z}=...+2i$, soit *z* = ...−2*i*. Ceci élimine **C** et **D**. Ce module vaut 10/3, il faut donc que la partie réelle fasse 8/3, réponse **A**.

Correction ex2

1. **Vrai** : si on passe en forme trigonométrique c'est immédiat : $(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}=2^5e^{i\frac{5\pi}{2}}=32i$.

2. **Faux** : $\frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}=\frac{\cancel{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{2}i}=e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ donc de module 1 mais d'argument $-\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}(2\pi)$.

3. **Faux** : on développe : $(z+1-2i)(\bar{z}+1+2i)=z\bar{z}+(1-2i)\bar{z}+(1+2i)z+1-4i^2$ d'où en remplaçant *z* par *x* + *iy*, $x^2+y^2+(1-2i)(x-iy)+(1+2i)(x+iy)+5=4\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=4$ donc le centre est bon mais le rayon est 2.

On aurait pu remarquer directement que $\bar{z}+1+2i=\overline{z+1-2i}$ d'où $|z-(-1+2i)|^2=4$ mais la conclusion est identique.

Correction ex3

Q1	Pour tout *n* entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	Faux
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre *z* est égale à :	$\frac{z+\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2i}$	Vrai :on a $\sin\theta=\frac{z-\bar{z}}{2i}=y$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z-\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy-x+iy)=iy$.
Q3	Si *z* est un imaginaire pur,	y^2	Vrai : $|z|^2=|iy|^2=|i|^2|y|^2=y^2$.

	alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	$-y^2$	Faux : $\lvert i\rvert^2=1\neq i^2=-1$.
		$-z^2$	Vrai : comme z est imaginaire pur, on a $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=y^2$ et $-z^2=-(iy)^2=y^2$.
Q4	*A*, *B* et *C* sont des points d'affixes respectives *a*, *b* et *c* telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	Vrai : d'un côté on a $\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{\lvert b-c\rvert}{\lvert c-a\rvert}=\lvert i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}\Rightarrow BA=AC\sqrt{3}$; par ailleurs le triangle *ABC* est rectangle en *A* d'où $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 4AC^2=BC^2$.
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	Faux : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\dfrac{c-a}{b-a}=\arg\dfrac{1}{i\sqrt{3}}$ $=\arg\dfrac{-i}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\pi}{2}$
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	Vrai : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(CA)\perp(AB)$.