ATSM

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

Sousse : 22-23 Mars 2010

Thème : Complexes

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit z un nombre complexe de module $r > 0$. Alors le conjugué de z est égale à

   a) $\dfrac{1}{rz}$ **b)** $\dfrac{r}{z}$ **c)** $\dfrac{r^2}{z}$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{z-i}{z+i}$ est imaginaire pur est

   a) le segment $[AB]$ **b)** la droite (AB) **c)** le cercle $\mathscr{C}(O,1)\setminus\{B\}$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel strictement positif si et seulement si, n s'écrit sous la forme : (où k est un entier naturel)

   a) $3k$ **b)** $6k$ **c)** $12k$

4. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

   a) $\theta+\dfrac{\pi}{6}$ **b)** $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ **c)** $\theta+\dfrac{2\pi}{3}$.

5. Pour $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, on pose $z=\dfrac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$. Alors la forme algébrique de z est :

   a) $\tan\theta$ **b)** $i\tan\theta$ **c)** $i\text{cotan}\theta$.

6. Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2+(1-5i)z+2=0$, alors les raines de (E) sont

   a) opposées **b)** conjuguées **c)** inverses.

Exercice 2:

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne l'application :

$$f\ :\begin{array}{ccc}\mathcal{P}\setminus(O;\vec{v}) & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ M(z) & \longmapsto & M'(z')\end{array},\ \text{avec } z'=\frac{z(z-\overline{z})}{z+\overline{z}}.$$

1. (a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

   (b) Donner l'image de l'axe des abscisses privé du point O par f.

2. Soit M un point de $\mathcal{P}\setminus\big((O;\vec{u})\cup(O;\vec{v})\big)$.

   (a) Montrer que la droite (MM') à une direction fixe que l'on précisera.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux.

   (c) Donner une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice 3:

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi]$.

1. On considère l'équation (E_θ) d'inconnue z : $z^2-iz-ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

   (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).

(b) Mettre sous forme exponentielle les solutions de (E_θ).

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $-e^{i\theta}$ et $i+e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

   (a) Montrer que M_1 varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

   (b) Calculer l'affixe du milieu du segment $[M_1M_2]$. En déduire que M_2 varie sur un cercle que l'on précisera.

3. (a) Déterminer θ pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

   (b) Déterminer θ pour que le vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ soient orthogonaux.

Exercice 4:

Soit α un réel de l'intervalle $[0,\pi]$, E_α l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2-2e^{i\alpha}z+e^{2i\alpha}+1=0$.

1. Résoudre l'équation E_α.

2. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points I, M, M' et M'' d'affixes respectives $e^{i\alpha}$; $ie^{i\alpha}$, $e^{i\alpha}-i$ et $e^{i\alpha}+i$.

   (a) Montrer que I est le milieu du segment $[M'M'']$ et que $\overrightarrow{IM''}=\overrightarrow{v}$.

   (b) Placer dans le plan $\mathcal{P}$, les points I et M dans le cas où α appartient à l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$ et construire alors les points M' et M''.

3. (a) Montrer que O est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[M'M'']$ et que (OM) est la tangente à $\mathscr{C}$ en O.

   (b) Déterminer α pour que le triangle $OM'M''$ soit isocèle.

Exercice 5:

Soit m un nombre complexe et (E_m) l'équation : $z^2-(2m-1)z+m(m-1)=0$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m). On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation.

2. On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
   et on désigne par M, N et P les points d'affixes respectives m, $m-1$ et m^2.
   On pose $m=x+iy$, où $x,y\in\mathbb{R}$

   (a) Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que M, N et P soient alignés.

   (b) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M tels que $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ soient orthogonaux.

   (c) Tracer Δ et $\mathscr{H}$.

Exercice 6:

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$ et (E_θ) l'équation définie par :
$z^2-3(\cos\theta)z+1+\cos^2\theta-i\cos\theta\sin\theta=0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ). (On note z' et z'' les solutions avec $|z''|=1$.)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, M' et M'' d'affixes respectives $\sqrt{3}$, z' et z''.

   (a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$, M' décrit une ellipse $(\mathcal{E})$ que l'on précisera.

   (b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ décrit par M''. Que représente A pour $(\mathcal{E})$.