Exercice N° : 1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
[unité graphique : 2 Cm].

On considère : * Le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$.

* Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct càd : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

* Le milieu Q de [OB].

1° - a) Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q du point Q .

b) Déterminer l'affixe Z_k du point K tel que ABQK soit un parallélogramme .

c) Démontrer que $\frac{z_k - a}{z_k}$ est imaginaire pur .Qu'en déduit-on pour le triangle OKA .

Préciser la nature du quadrilatère OQAK.

2° - Placer les points A , B , Q , et K dans le plan .

3°-Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$. a)Calculer $\frac{z_k - b}{z_k - c}$;Que peut-on déduire pour les points B , C et K .

b) Placer le point C sur la figure .

Exercice N° : 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l ' équation : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2. a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2 .

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left[\frac{z_1}{z_2}\right]^2$.

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.(unité: 1cm).On considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}\,(1 + i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}\,(1 - i)$ et le point A d'affixe $Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe du point M_3, image de M_2 par 1 'homothétie h de centre A et de rapport -3.

b) Déterminer l'affixe du point M_3 , image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2 , M_3 et M_4.

d) Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e) Soient I le milieu du segment $[M_3 M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I.

Montrer que les points M_1 , M_3 , M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice N° : 3.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives i et - i.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de -i associe le point M' d'affixes z ' telle que $z' = \dfrac{1+iz}{z+i}$

1°/Quelle est l'image par f du point O?

2°/Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe 1 + i ?

3°/ Montrer que l'équation $z = \dfrac{1+iz}{z+i}$ admet deux solutions que l'on déterminera .

4°/ Vérifier que $Z' = \dfrac{1+iz}{z+i}$.

En déduire que $OM' = \dfrac{AM}{BM}$ et que $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})\ (2\pi)$.

5°/Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle (C) que l' on précisera.

6°/Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B.Montrer que son image M'par l'application f est située sur l'axe des abscisses.

Exercice N° : 4.

1°- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + \overline{z} = 0$.

On notera A et B les points images des solutions non nulle ayant la même partie réelle.

2°-Soit $\theta \in [0, \pi]$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $Z^2 - (2i + \cos\theta) Z + 2i \cos\theta = 0$.
On désignera par I le point image de la solution réelle et par C le point image de l'autre solution.
b) Comment choisir θ pour que I soit le milieu de [AB] ; préciser alors l'affixe du point E tel que: ACBE soit un parallélogramme.
3° - Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$

a)Montrer (sans calcul explicite de z) que

si z est solution de l'équation : $\dfrac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta}$ alors $z = \overline{z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{1-iz}{1+iz} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .On note D le point image de la solution trouvée .

4° - Construire Ies points A , B , C et D dans un repère orthonormé . Quelle est la nature du triangle DAB et celle du quadrilatère OCBA.

Exercice N° : 5.

On considère dans $\mathbb{C}$ l' équation :

$$(E) : Z^3 - 2(2-i)Z^2 + 8(1-i)z + 16i = 0 .$$

1°) a – Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera .

b- Déterminer les deux autres solutions de cette équation .

2°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_1 = 2 + 2i$ et $Z_2 = 2 - 2i$.

a- Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

b- Placer dans P les points A et B

3°) Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point M distinct de O d'affixe Z associe le point M ' d'affixe Z ' tel que $Z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$

a- Calculer les affixes des points A' et B ' images respectives de A et B par f .

b- Montrer l'équivalence :

$$|Z-2| = 2 \Leftrightarrow |1-2\overline{Z'}| = |\overline{Z'}| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - Z'\right| = |Z'|$$

4°) Soit(C) le cercle de centre I d'affixe 2 et de rayon 2 .

a- Vérifier que [AB] est un diamètre de (C) .

b- Soit M un point de(C) distinct de O, montrer que son image M' par f est situé sur une droite Δ que l'on précisera. Construire Δ et (C) .

Exercice N°:6.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.(Unité = 3 Cm).

On désigne par A le point d'affixe i . A tout point M du plan distinct de A d'affixe z , on associe le point M ' d'affixe z ' défini par $z' = \dfrac{z^2}{i-z}$.

1° - Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2° - Etant donné un nombre complexe z distinct de i ; on pose :

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x , y , x' , y' des réels .

Montrer qu $x' = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est situe sur l'axe des imaginaires purs . Dessiner E .

3° - Trouver une relation simple liant les longueurs OM ; AM et OM ' .

En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M ' soient situés sur un même cercle de centre O .Dessiner F .

4° - Dans toute cette question , on considère un point M d'affixe z situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ .On désigne par G le centre de gravité du triangle (A M M') .Calculer l'affixe z_G du point G en fonction de z . Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon .

Après avoir comparer les angles $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{OG}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{AM}}\right)$ effectuer la construction du point G (connaissant M) .En déduire la construction du point M '.