Les nombres complexes (les équations1).

Exercice N° : 1.

Soit $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - (1 + i\sqrt{3}) = 0 \quad (1)$$

1. Résoudre cette équation et exprimer les solution Z' et Z'' en fonction de a et de i a .
2. Mettre le nombres complexes a sous forme trigonométrique et représenter ,dans le plan complexe son point image A ainsi que le point B image du nombre complexe i a .
   En déduire une construction simple des points image M' et M''des solutions de l'équation (1).
   Mettre ces solutions sous forme trigonométrique.
3. En déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice N° : 2.

Soit p un nombre complexe non réel.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$.

On note z' et z'' les solutions de cette équation.

On désigne par A , B , P , M' et M'' les points d'affixes respectives 1 , -1 , p , z' et z'' dans la plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct .

1°. Montrer que P est le milieu de [M' M''] et que $OM'.OM''=OA^2=OB^2$

et que (Ox) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM''})$.

2°. Calculer $(z' - p)^2$ et $(z'' - p)^2$ en fonction de p. En déduire que

$PA.PB = PM'^2 = PM''^2$ et que (M'M'') est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PB})$.

Exercice N° : 3.

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M (z) du plan vérifiant :

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$$

Exercice N° : 4.

1°. Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Au nombre complexe a , on associe le point A d'affixe a .

Quel est l'ensemble des pointe A tels que : $|a| = |a - 1|$?

Démontrer que lorsque $|a| = |a - 1|$, on a : $\arg a + \arg(a - 1) \equiv \pi \ (2\pi)$.

2°.**Application:** On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = i(z - 1)^3$. **(1)**

a) Quelle relation existe-t-il entre les modules de a et a-1 si a est une solution de l'équation **(1)** ?A quel ensemble appartiennent donc les points images des solutions de l'équation **(1) ?**

b) On pose $\arg a = \theta$. Calculer θ lorsque la relation **(1)** est vérifiée.

c) En utilisant les résultats du a) et du b) construire les points images des solutions de **(1)** dans le plan P. Donner ensuite les solutions sous formes trigonométriques (module et argument), sans chercher à calculer les cosinus des réels trouvés . (BAC juin 75)