DEVOIR DE SYNTHESE N° 3	SECTIONS : 4$^{\text{éme}}$ *Sciences de l'informatique 2*
	EPREUVE : *Mathématiques*
	DUREE : 3 *heures*
	PROFESSEUR :

EXERCICE N° 1: (3 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à recopier sur la copie cette réponse exacte sans justification.

BAREME : *Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	REPONSES
1) $\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx =$	a) $\frac{\ln 2 - \ln 1}{2}$ b) $\frac{\ln 5 - \ln 2}{2}$ c) $\frac{\ln 2 - \ln 5}{2}$
2) $\int_{-1}^{2} e^{1-2x}dx =$	a) $-\int_1^{-2} e^{1-2x}dx$ b) $-\int_2^{-1} e^{1-2x}dx$ c) $\int_{-2}^{1} e^{1-2x}dx$
3) On pose $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x-1}dx$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x-1}dx$, alors le nombre I – J est égal à	a) $\ln\frac{2}{3}$ b) $\ln\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$

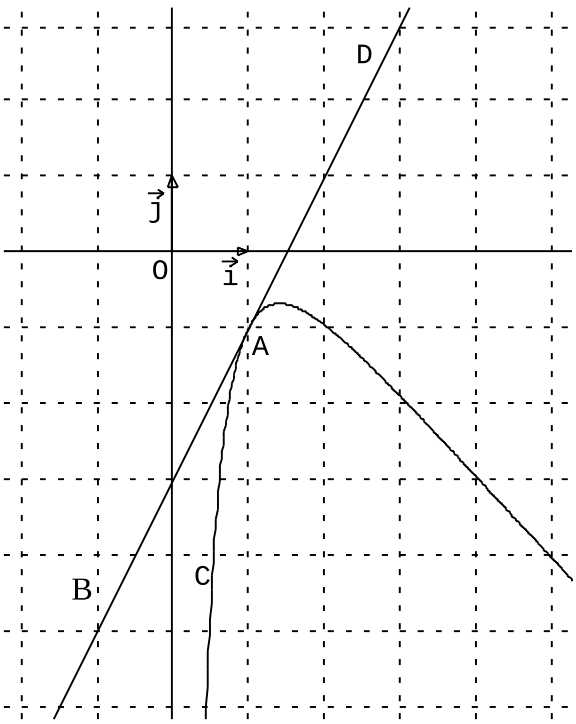
EXERCICE N° 2: (4 points)

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, la courbe (C) représente la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = ax + b\frac{\ln x}{x}$ où a et b sont deux réels.

La droite D est tangente à (C) au point A(1 , –1). Elle passe par le point B(–1 , –5).

1. Déterminer, à l'aide du graphique, $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les réels a et b.
4. On admet que $f(x) = -x + 3\frac{\ln x}{x}$
   a. Déterminer la limite de f à droite en 0.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?
   b. Montrer que la courbe (C) admet la droite Δ d'équation $y = -x$ comme asymptote en $+\infty$
5. Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$



<u>EXERCICE N° 3</u>: (4 points)

Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

1. **a)** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.

b) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2. **a)** Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé par les points M_1, M_2 et M_3, puis les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé par les points M_4, M_5 et M_6.

b) Déterminer, avec des coefficients arrondis à 10^{-2}, une équation de la droite (G_1G_2).

c) En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2004.

3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1125.

a) Ajouter le point $M_7(7\,;\,1125)$ sur le graphique précédent.

b) On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i, $2\leq i \leq 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est plus pris en compte).
Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

c) En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2004 ?

<u>EXERCICE N° 4</u>: (5 points)

Une petite entreprise de textile commercialise des pantalons et des chemises.
Quand un client se présente, il achète <u>au plus</u> un pantalon et une chemises.

1. La probabilité pour qu'un client achète un pantalon est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète la chemise quand il a acheté le pantalon est 0,7 et la probabilité qu'il achète la chemise quand il n'a pas acheté le pantalon est 0,1.

a) On note P l'événement « un client achète le pantalon».
On note C l'événement « un client achète la chemise».
Construire un arbre de probabilité décrivant la situation.

b) Montrer que la probabilité de l'événement $P\cap C$ est égale à 0,14.

c) Calculer la probabilité de l'événement C.

d) Calculer la probabilité pour qu'un client achète le pantalon quand il a acheté la chemise.

2. Le pantalon est vendue 125 DT et la chemise 45DT.

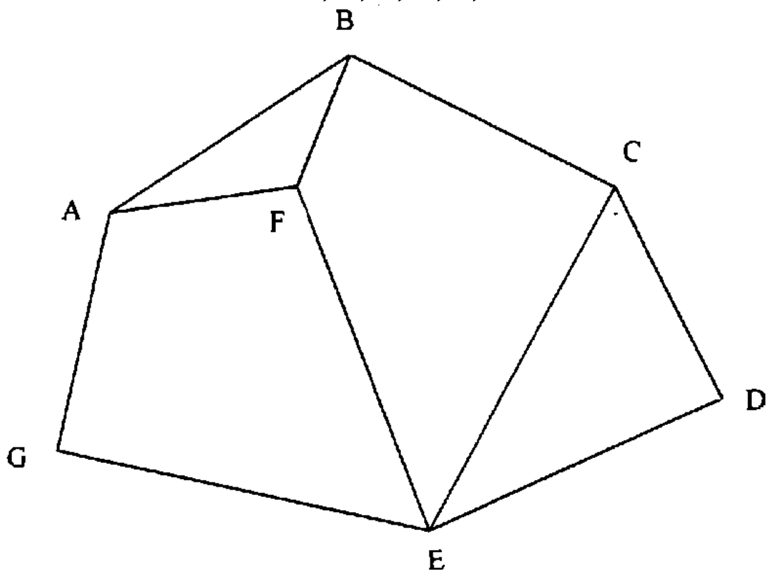
a) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs les dépenses d'un client
Vérifier que l'ensemble des valeurs prises par X est {0, 45 , 125 , 170 }. Déterminer ainsi la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On rappelle que la probabilité pour qu'un client achète l'ensemble pantalon et chemise est 0,14.
On choisit trois clients au hasard. On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise.
Quelle est la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble pantalon et chemise?

<u>EXERCICE N° 5</u>: (4 points)

Soit le graphe Γ suivant constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.



1. Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?

2. a) Donner un sous-graphe complet d'ordre 3 de Γ. En déduire un encadrement du nombre chromatique de Γ?

b) Proposer une coloration du graphe Γ et en déduire son nombre chromatique.

3. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ? admet-il un cycle eulérien ou une chaine eulérienne ? Justifier

4. Donner la matrice M associée à Γ (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

5. En utilisant la matrice M^2 donnée ci-dessous, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction

Solution-Exercice 1

1) b) 2) b) 3) a)

Solution-Exercice 2

1- $f(1) = -1$

$$f'(1) = pente\ de\ D = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5+1}{-1-1} = 2$$

2- $f'(x) = a + b\frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = a + b\frac{1-lnx}{x^2}$

3- $f(1) = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$ donc $f'(x) = -1 + b\frac{1-lnx}{x^2}$ comme $f'(1) = 2$ alors $-1 + b = 2 \Leftrightarrow$ $\boxed{b = 3}$

4- a) $\lim_{0^+} f = -\infty$, $(O, \vec{j}): x = 0$ est une asymptote verticale à (C)

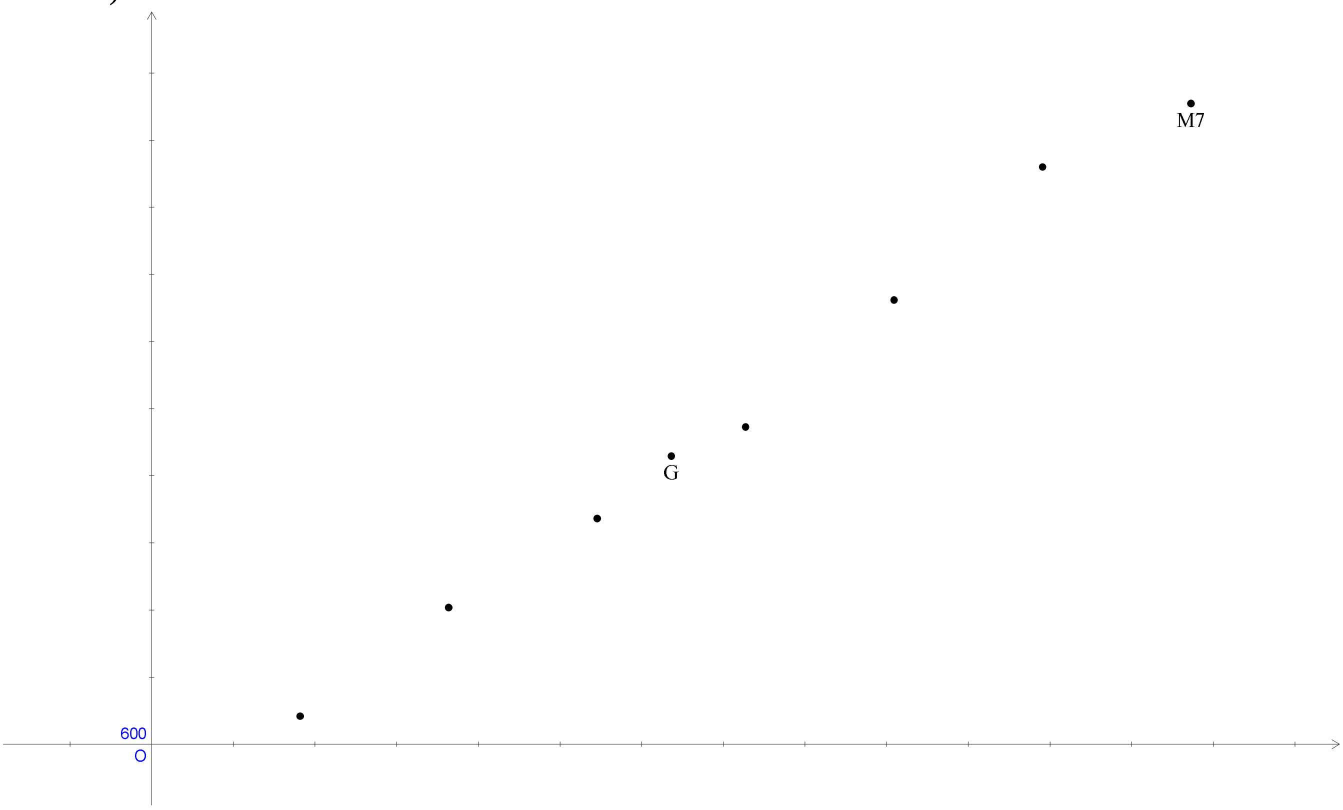
b) $\lim_{+\infty}[f(x) + x] = \lim_{+\infty} 3\frac{lnx}{x} = 0$ donc $\Delta: y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

5- $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) + x|\,dx$ or $f(x) + x = 3\frac{lnx}{x} \geq 0\ sur\ [1, e]$ donc $\mathcal{A} = 3\int_1^e \frac{lnx}{x}dx = 3\int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{lnx}_{u}\,dx =$

$$3\left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_1^e = \frac{3}{2}[(lnx)^2]_1^e = \frac{3}{2}(1-0) = \boxed{\frac{3}{2}\ (u.a)}$$

Solution-Exercice 3

1- a)



b) $G(\bar{X}, \bar{Y})$ à l'aide de la calculatrice, on obtient $G(3{,}5\,; 836{,}17)$

2- a) $G_1(2\,; 706{,}67)$ et $G_2(5\,; 965{,}67)$

b) $(G_1G_2): y = ax + b$ avec $a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{965{,}67 - 706{,}67}{5-2} = \frac{259}{3} = 86{,}33$

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 836{,}17 - 86{,}33 \times 3{,}5 = 534{,}02$ d'où $\boxed{(G_1G_2): y = 86{,}33x + 534{,}02}$

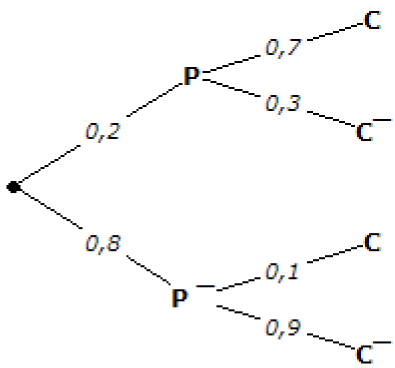
c) Le rang de l'année 2004 est 9 donc pour $x = 9$, $y = 86{,}33 \times 9 + 534{,}02 \approx 1311\ appareils$

3- b) $D: y = a(x - \bar{X}) + \bar{Y}$ où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$, à l'aide de la calculatrice $\boxed{D: y = 86{,}657x + 529{,}876}$

c) pour $x = 9$, $y = 86{,}657 \times 9 + 529{,}876 \approx 1310$ *appareils*

Solution-Exercice 4

1- a) $p(P) = 0{,}2$; $p_P(C) = 0{,}7$; $p_{\bar{P}}(C) = 0{,}1$



b) $p(P \cap C) = p(P) \times p_P(C) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

c) $p(C) = p(P \cap C) + p(\bar{P}) \times p_{\bar{P}}(C) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$

d) $p_C(P) = \frac{p(P \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}14}{0{,}22} = \frac{7}{11} = 0{,}636$

2- a) $X(E) = \{0{,}45{,}125{,}170\}$

x_i	0	45	125	170
$p(X = x_i)$	0,72	0,08	0,06	0,14

$p(X = 0) = p(\bar{P} \cap \bar{C}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$

$p(X = 45) = p(C \cap \bar{P}) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08$

$p(X = 125) = p(P \cap \bar{C}) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$

$p(X = 170) = p(P \cap C) = 0{,}14$

b) $E(X) = 0 \times 0{,}72 + 45 \times 0{,}08 + 125 \times 0{,}06 + 170 \times 0{,}14 = 34{,}9$

3- il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 3 et p = 0,14

soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de clients qui ont acheté un ensemble pantalon et chemise

donc la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble pantalon et chemise est

$p(Y = 1) = C_3^1 (0{,}14)^1 (1 - 0{,}14)^2 = 3 \times 0{,}14 \times (0{,}86)^2 = 0{,}31$

Solution-Exercice 5

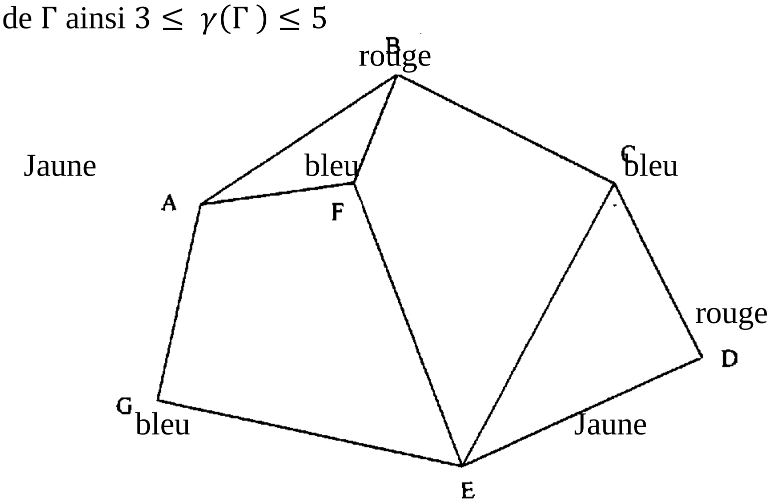
1- l'ordre de Γ est 7

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	3	2	4	3	2

2- a) Chacun des sous graphes ABF et CDE est sous graphe complet d'ordre 3 de Γ

$N \leq \gamma(\Gamma) \leq$ r + 1 où $N = 3$ qui est l'ordre du plus grand sous graphe de Γ et $r = 4$ qui est le plus haut degré des sommets de Γ ainsi $3 \leq \gamma(\Gamma) \leq 5$

b)



$\gamma(\Gamma) = 3$

3- Γ n'est pas complet car les sommets F et G (par exemple) ne sont pas adjacents
Γ est connexe car il existe une chaine entre deux sommets quelconques de Γ
Γ n'admet pas de cycle eulérien car ses sommets ne sont pas tous de degré pair
Γ n'admet pas de chaine eulérienne car plus que deux sommet sont de degré impair

4- $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5- le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir est 5 (c'est la somme des coefficients de la première ligne sauf a_{11}