
DEVOIR DE CONTRÔLE N° 3

SECTIONS : 4^{ème} Sciences Informatiques 2
EPREUVE : Mathématiques
DUREE : 2 heures
PROFESSEUR : AFIF BEN ISMAIL

Exercice 1: (3 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point et une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Pour tous réels a et b , strictement positifs, $\ln(ab) - \ln(a^2)$ est égal à :

a) $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

b) $\ln(b - a)$

c) $\frac{\ln b}{\ln a}$

2. $e^{-2\ln 3}$ est égal à :

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{9}$

c) 9

3. L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $e^{3x} - 1 \geq 0$ est l'intervalle

a) $[0, +\infty[$

b) $[1, +\infty[$

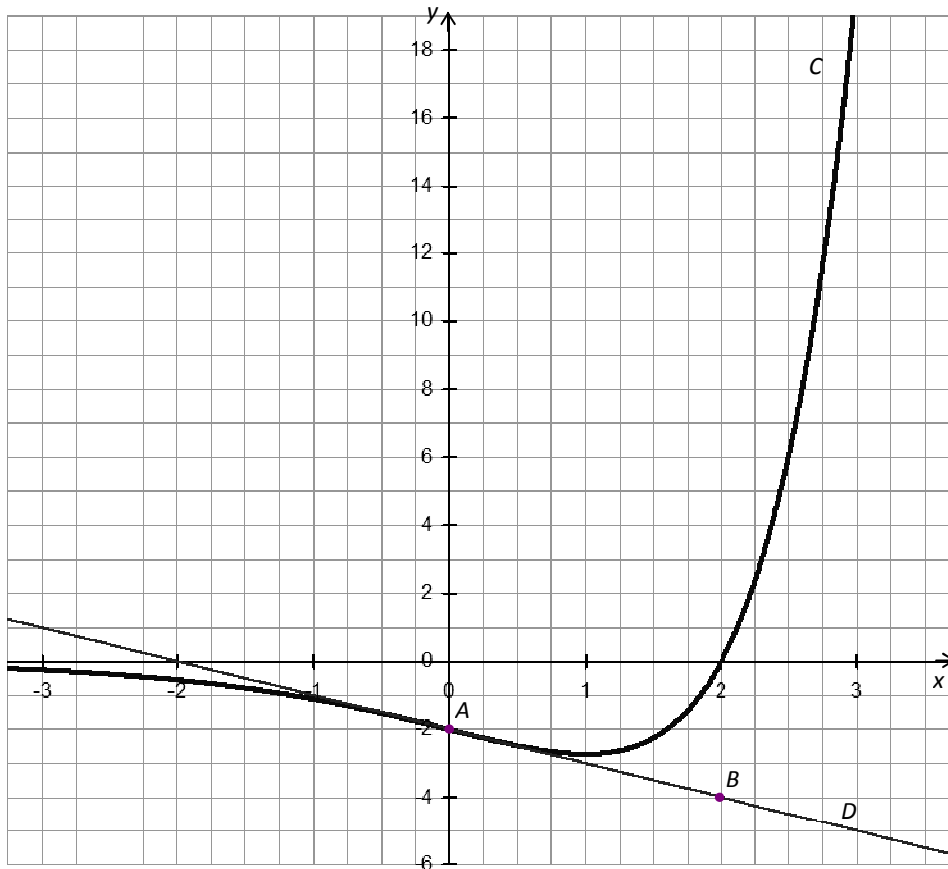
c) $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Exercice 2: (6 pts)

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe C ci-dessous représente une fonction f définie sur \mathbb{R} .

La tangente D à la courbe C au point $A(0, -2)$ passe par le point $B(2, -4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f .

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.

b) Justifier que : $f'(0) = -1$.

2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = (x+a)e^{bx}$.

a) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = (bx + ab + 1)e^{bx}$.

b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b .

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x-2)e^x$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x-3)e^x$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

b) Calculer $\int_2^3 f(x) dx$.

Exercice 3: (5 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- Calculer le déterminant de A . En déduire que A est inversible

2- Montrer que $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3- Résoudre par un calcul matriciel, le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice 4: (6 pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

PARTIE A : un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i)

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Interpréter le résultat

3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent (*les coefficients seront arrondis à l'unité*).

4. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE B : un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).

3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année.

4. En prenant l'approximation $y \approx 57,1 e^{0,224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE C : comparaison des ajustements.

En 2009, il y a eu 430 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ? Justifier la réponse.

Correction

Solution-Exercice 1

- 1) a) 2) b) 3) a)

Solution-Exercice 2

PARTIE A

1- a) $f(0) = -2$

b) $f'(0)$ est la pente de D donc $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4+2}{2-0} = -1$


2- a) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = e^{bx} + be^{bx}(x+a) = (1+bx+ab)e^{bx} = (bx+ab+1)e^{bx}$

b) $f(0) = -2 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$

$f'(0) = -1 \Leftrightarrow -2b + 1 = -1 \Leftrightarrow -2b = -2 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$

PARTIE B

1- $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$ donc $\text{signe}(f'(x)) = \text{signe}(x-1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\emptyset	$+$
$f(x)$			

2- a) $\lim_{+\infty} f = +\infty$

b) $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} x e^x - e^x = 0 - 0 = 0$ alors $(O, \vec{i}) : y = 0$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

3- a) g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = e^x + (x-3)e^x = (1+x-3)e^x = (x-2)e^x = f(x)$ donc g est une primitive de f sur \mathbb{R}

b) $\int_2^3 f(x) dx = [g(x)]_2^3 = g(3) - g(2) = 0 - (-e^2) = e^2$

Solution-Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1- $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible

2- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}A)^t$

Avec $\text{com}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ donc

$(\text{com}A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -7 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et par suite $A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -7 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

REMARQUE : on pourra justifier que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$

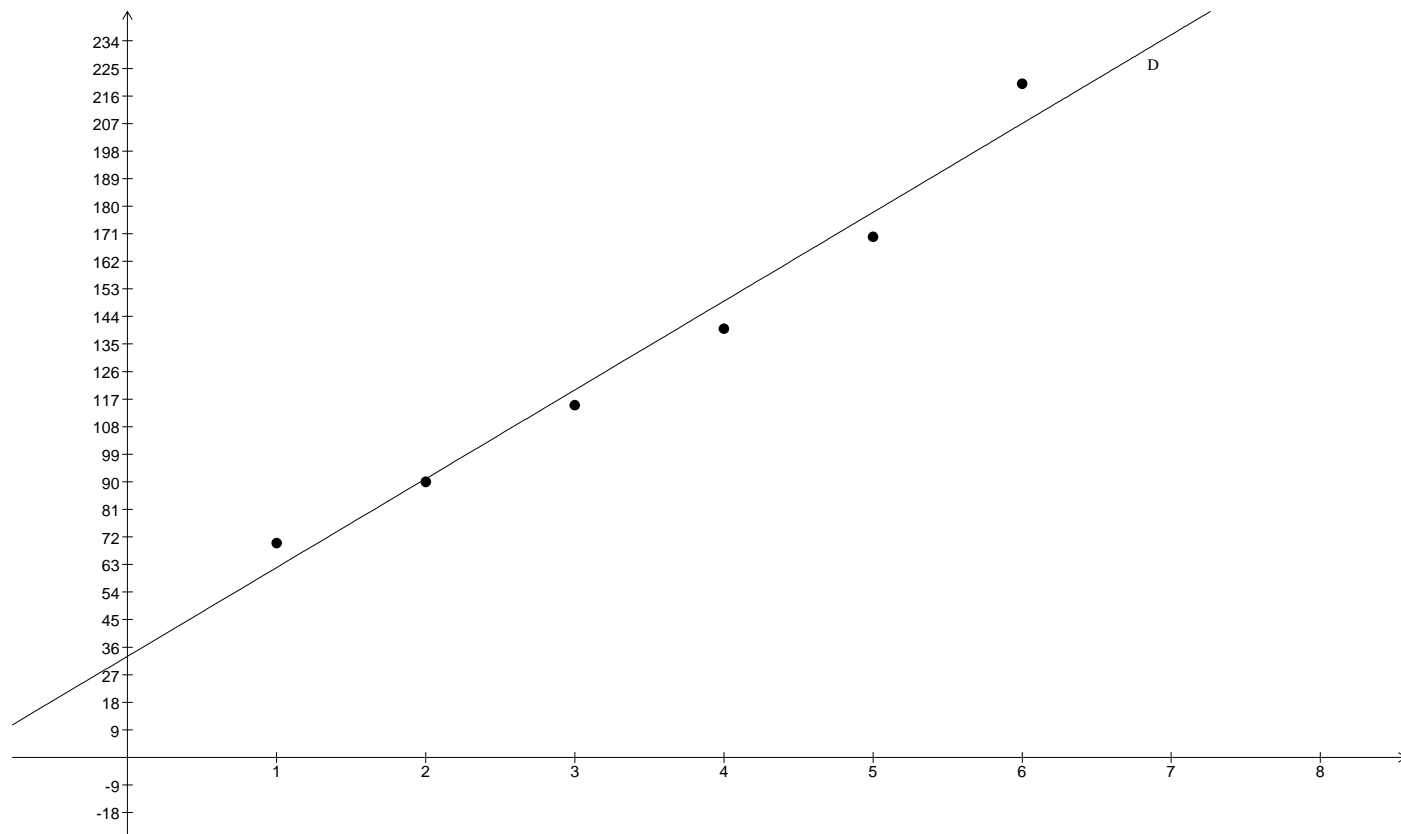
3- $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ L'écriture matricielle de ce système est $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(-2; 0; 1)\}}$$

Solution-Exercice 4

PARTIE A



2- $r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0,98$ (d'après la calculatrice)

$|r| = 0,98 > 0,75$ alors la corrélation linéaire est forte donc un ajustement affine est justifié

1- $D: y = a(x - \bar{X}) + \bar{Y}$ où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = 29$ d'où $D: y = 29x + 33$

2- Le rang de l'année 2009 est 9 donc $y = 29 \times 9 + 33 = 294$ adhérents

PARTIE B

1-

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248	4,5	4,745	4,942	5,136	5,394

2- $z = a'(x - \bar{X}) + \bar{Z}$ où $a' = \frac{cov(X,Z)}{V(X)} = 0,224$ donc $z = 0,224x + 4,044$

3- comme $z = \ln y$ alors $\ln y = 0,224x + 4,044 \Leftrightarrow y = e^{0,224x+4,044} \Leftrightarrow y = e^{4,044} e^{0,224x}$ donc $y = 57,054 e^{0,224x}$

4- pour $x = 9$, $y = 57,054 e^{0,224 \times 9} \approx 429$ adhérents

PARTIE C

429 est proche de 430 donc l'ajustement exponentiel semble le plus pertinent