Devoir de contrôle n° 3

EXERCICE N° 1(5 points)

Dire « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse :

1/ $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \frac{1}{2}$ 2/ $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\,dx = e^2 - 1$ 3/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2)$

4/ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(xe^x)' = xe^x + e^x$ donc $\int_0^{\ln(2)}(x+1)e^x\,dx = 2\ln(2)$

5/ A l'aide d'une intégration par parties on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N° 2 (5 points)

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1/ Calculer I_0 puis calculer, à l'aide d'une intégration par parties, I_1

2/ Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. Déduire I_2

3/ Montrer que (I_n) et décroissante

4/ Etablir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. Déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} nI_n$

EXERCICE N° 3 (5 points)

La durée de vie exprimée en année d'un certain type de machines est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

1/ Une étude montre qu'une machine sur trois est encore en état de marche après six ans . Montrer que $\lambda = \frac{\ln(3)}{6}$

2/ Dans la suite, on prend $\lambda = 0,2$

a) Déterminer la fonction densité de T et la représenter.

b) Quelle est la probabilité pour qu'une machine survie au-delà de cinq ans ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'une machine ait une durée de vie entre 6 et 8 ans ?
Interpréter graphiquement le résultat.

d) Sachant qu'une machine est âgée de 8 ans, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore 3 années supplémentaires au moins ?

e) Déterminer la fonction de répartition de T et la représenter.

EXERCICE N° 4 (5 points)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale . Au début, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore mais les arguments publicitaires font évaluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre. On note a_n la probabilité qu'une personne interrogée préfère Aurore la semaine n

1/Décrire la situation par un graphe probabiliste G.

2/ Soit p_n l'état probabiliste à la nième semaine. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}\,a_n + \frac{3}{20}$

3/ Donner l'état probabiliste initial p_1 . Calculer M^2 et déduire p_3 .

4/ Déterminer l'état stable P de ce graphe . Déduire $\underset{n\to+\infty}{im}\, a_n$.

Le parfum Aurore finira –t-il par être préféré au parfum Boréale ?

Bon travail